

Análisis dinámico de una torre autoportada sujeta a cargas de viento y sismo

Dynamic analysis of a self-supported tower subjected to wind and seismic loadings

Fecha de entrega: 26 de mayo 2017
Fecha de aceptación: 28 de marzo 2018

Ingrid Fernández, Vivian B. Elena, Patricia Martín, Yanet Corona e Israel A. Hernández

Facultad de Ingeniería Civil, Universidad Tecnológica de La Habana José Antonio Echeverría CUJAE, Calle 114, No. 11901, Ciclovía y Rotonda, Marianao, La Habana, Cuba, ingridfl@civil.cujae.edu.cu, vivian@civil.cujae.edu.cu, patriciamr@civil.cujae.edu.cu, ycorona@proyectos.ohc.cu, ihernandez@proyectos.ohc.cu

Las torres autoportadas son estructuras que requieren atención especial bajo las acciones dinámicas generadas por cargas de viento y sismo. Se pueden identificar tres enfoques para el análisis dinámico de estas estructuras: métodos estáticos equivalentes, métodos en el dominio de la frecuencia y métodos en el dominio del tiempo. El desarrollo de la computación en las últimas décadas ha facilitado las aplicaciones de los métodos de análisis dinámico complejos, como el método del dominio del tiempo, que pueden resolverse mediante técnicas de superposición modal o de integración directa. Dada la coexistencia en la literatura de ambas técnicas en el análisis de torres autoportadas, el presente trabajo tiene como objetivo comparar la respuesta en términos de desplazamientos y reacciones de soporte, de una torre autoportada bajo la acción de cargas dinámicas de viento y sismo, utilizando la superposición modal y la integración directa. Los resultados de la aplicación de ambas técnicas mostraron diferencias inferiores al 2% en los valores de las reacciones de apoyo y los desplazamientos de la torre. El procedimiento basado en la superposición modal es más eficiente ya que consume menos tiempo y memoria computacional.

Palabras clave: análisis dinámico, viento, sismo, integración directa, superposición modal

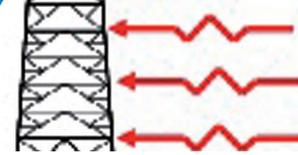
Self-supporting towers are structures that require special attention under the dynamic actions generated by wind loads and seismic loads. Three approaches can be identified for the dynamic analysis of these structures: equivalent static methods, methods in the frequency domain and methods in the time domain. The development of computation in recent decades has made easier the applications of complex dynamic analysis methods, such as the time domain method, that can be solved by means of modal superposition or direct integration techniques. Given the coexistence in the literature of both techniques in the analysis of the self-supported towers, the present work aims to compare the response in terms of displacements and support reactions, of a self-supported tower under the action of dynamic loads of wind and earthquake, using modal superposition and direct integration. The results of the application of both techniques showed differences of less than 2% in the values of support reactions and the displacements of the tower. The procedure based on modal superposition is more efficient since it consumes less time and computational memory.

Keywords: dynamic analysis, wind, earthquake, direct integration, modal superposition

Introducción

La complejidad de las obras civiles actuales, el desarrollo del conocimiento de las cargas que actúan sobre las estructuras y su variación con el tiempo, hacen cada vez más frecuentes los análisis estructurales asistidos por computadoras. Sin embargo, sigue siendo un proceso

complejo para determinar las condiciones de disipación de energía y cargas dinámicas, especialmente las debidas al efecto de los sismos o del viento. En aras de minimizar los errores que producen las simplificaciones o estimaciones asumidas en las características de los modelos computacionales, adquiere una gran significación



la determinación de las ventajas o limitaciones de los métodos de análisis y herramientas numéricas existentes en función de las características estructurales de las obras civiles.

Las torres reticuladas de tipología autoportada son estructuras con comportamiento lineal con predominio de un modo fundamental de vibración. En esta tipología de torre es posible desarrollar el análisis dinámico mediante tres enfoques fundamentales: métodos estáticos equivalentes, métodos en el dominio de la frecuencia o en el dominio del tiempo. En el dominio del tiempo específicamente, si la estructura es lineal, como es el caso de las torres autoportadas, la resolución numérica de la ecuación de movimiento puede ser abordada mediante dos técnicas: superposición modal o integración directa. Los estudios dinámicos en el dominio del tiempo sobre estas estructuras comenzaron a ganar auge desde la década del setenta. Uno de los trabajos pioneros en esta línea ante cargas de viento es el de Chiu y Taoka (1973). Estos autores analizaron el comportamiento de una torre autoportada a través de mediciones a escala real y simulaciones numéricas del campo de viento y de la respuesta de la estructura a través de un proceso iterativo paso a paso.

Augusti *et al.* (1992) emplearon también la vertiente experimental y numérica ante acciones del viento. En ese trabajo fue realizado un análisis dinámico numérico directo sobre la torre, para lo cual fueron sintetizadas series temporales de viento. Ante acciones sísmicas en los años noventa y primera década de los años 2000 se destacan autores que han hecho uso de estos métodos como Khedr y McClure (1999) y Amiri *et al.* (2007a). Khedr y McClure (1999) estudiaron 10 torres con alturas entre 66 y 121 m sometidas a 45 funciones horizontales, provenientes de 23 eventos sísmicos diferentes. El estudio de Khedr y McClure (1999) fue realizado con asistencia del software SAP90, empleando el método del dominio del tiempo por superposición modal. Amiri *et al.* (2007a) al igual que los autores anteriores emplearon 10 torres, sin embargo las alturas de estas oscilaron entre 18 y 67 m. Las estructuras fueron analizadas también en este caso por el método de superposición modal con asistencia del software SAP2000. Chen y Li (2012) analizaron una torre autoportada meteorológica de 102 m de altura mediante las técnicas de integración directa ante los efectos de una

función simulada de viento con asistencia del software SAP2000. Martín y Elena (2012) hacen uso del mismo software conduciendo un análisis por superposición modal para obtener la respuesta estructural de una torre de 60 m de altura bajo carga sísmica.

Dada la coexistencia en la bibliografía de varias vías de solución de la ecuación de movimiento en el dominio del tiempo ante acciones dinámicas, el presente trabajo tiene como objetivo comparar la respuesta, en términos de desplazamientos y reacciones de apoyo, de una torre autoportada sometida a efectos de cargas dinámicas de viento y sismo mediante las técnicas de superposición modal e integración directa.

Métodos de solución de la ecuación de movimiento

El equilibrio de fuerzas de los sistemas de múltiples grados de libertad con masas concentradas, en cualquier instante de tiempo puede ser expresado mediante la siguiente fórmula:

$$F_I + F_D + F_S = R \quad (1)$$

donde F_I es el vector de las fuerzas de inercia actuando en el nodo de concentración de la masa, F_D es el vector de amortiguamiento viscoso o de disipación de energía, F_S es el vector de las fuerzas internas de la estructura y R es el vector de las fuerzas externas aplicadas. Para sistemas lineales, los vectores de fuerza pueden ser reemplazados y expresados en términos de las propiedades físicas de los sistemas estructurales de forma que F_I se sustituye por (2), F_D por (3) F_S y por (4) como sigue:

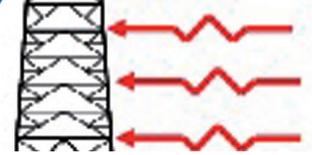
$$F_I = M\ddot{v} \quad (2)$$

$$F_D = C\dot{v} \quad (3)$$

$$F_S = Kv \quad (4)$$

De estos términos M , C y K son las matrices de masa, amortiguamiento y rigidez de la estructura y \ddot{v} , \dot{v} y v los vectores de aceleración, velocidad y desplazamiento respectivamente. De esta forma (1) puede sustituirse por (5) que es la denominada ecuación diferencial del movimiento para sistemas lineales de múltiples grados de libertad (*e.g.* Clough y Penzien, 1993).

$$M\ddot{v} + C\dot{v} + Kv = R \quad (5)$$



En la superposición modal, la ecuación diferencial del movimiento es transformada en formas modales, expresando el vector desplazamiento como una combinación lineal de vectores propios o autovectores. Si se aplica la transformación en coordenadas ortogonales a (5), de acuerdo con Clough y Penzien (1993), se obtiene la siguiente ecuación de movimiento desacoplada en modos individuales:

$$M_n \ddot{Y}_n + C_n \dot{Y}_n + K_n Y_n = R_n \quad (6)$$

donde las coordenadas modales de los n modos, son definidas como:

$$M_n = \phi_n^T m \phi_n \quad (7)$$

$$C_n = \phi_n^T c \phi_n \quad (8)$$

$$K_n = \phi_n^T k \phi_n \quad (9)$$

$$R_n = \phi_n^T r(t) \quad (10)$$

Si (6) se divide por la masa, la ecuación modal del movimiento puede ser reescrita y queda expresada mediante (11), donde el término ζ_n es la razón de amortiguamiento modal y ω_n es la frecuencia natural no amortiguada.

$$\ddot{Y}_n + 2\zeta_n \omega_n \dot{Y}_n + \omega_n^2 Y_n = \frac{R_n}{M_n} \quad (11)$$

La respuesta total del sistema puede ser obtenida resolviendo las n ecuaciones modales individuales y superponiendo sus efectos.

Las características de los modos involucrados en el análisis deben ser previamente obtenidas de un análisis modal. Dos métodos son empleados fundamentalmente para obtenerlas: el método de vectores propios (*eigenvectors*) y el método de vectores de Ritz (Wilson, 2002). Los vectores propios determinan las vibraciones no amortiguadas libres de los modos del sistema, involucrando en la solución los valores propios generados en el problema de resolución de la ecuación diferencial del movimiento. La principal desventaja de este método es que no toma en cuenta la distribución espacial de la carga, con lo cual muchos de los modos calculados son ortogonales a la misma y no participan

en la respuesta dinámica de la estructura, requiriendo trabajo computacional adicional. Wilson *et al.* (1982) introducen por vez primera los análisis dinámicos sobre la base de un conjunto especial de vectores dependientes de la carga: los vectores de Ritz. Se ha demostrado que el empleo de los vectores de Ritz conduce a resultados más precisos cuando se trata de la realización de análisis dinámico de estructuras (Clough y Penzien 1993; Zhou y Zheng, 2008; Aktas y Karasin, 2014; Chopra 2014).

En la integración paso a paso, el análisis es dividido en una secuencia de pasos o intervalos cortos de tiempo $(0, \Delta t, 2\Delta t, \dots, T)$, donde T , es la duración total de la serie temporal, luego para cada paso Δt se obtiene una respuesta. Con estos principios se han desarrollado varios procedimientos de integración numérica, los que de forma general pueden ser clasificados en explícitos o implícitos. Los métodos explícitos son condicionalmente estables respecto al tamaño del intervalo Δt , por lo tanto requieren de pasos de tiempo lo suficientemente cortos para garantizar la precisión (Chopra, 2014). Dentro de este grupo se encuentra principalmente el método de diferencia central (Clough y Penzien, 1993; Chopra, 2014). Las matrices de aceleración y velocidad en este método son aproximadas a través de las fórmulas (12) y (13).

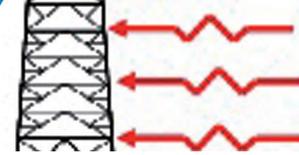
$$\ddot{v}_t = \frac{1}{\Delta t^2} [v_{t-\Delta t} - 2v_t + v_{t+\Delta t}] \quad (12)$$

$$\dot{v}_t = \frac{1}{2\Delta t} [-v_{t-\Delta t} + v_{t+\Delta t}] \quad (13)$$

Las fórmulas (12) y (13) se sustituyen en la ecuación de movimiento (5) para obtener la respuesta final. Para que la solución sea estable se debe garantizar el cumplimiento de $\Delta t < \frac{T_n}{\pi}$, donde T_n es el periodo natural más pequeño de los modos de interés de la estructura (Clough y Penzien, 1995).

Dentro de los métodos implícitos se encuentran principalmente: el método de Newmark- β , el método de Wilson- θ y el método de Hilber-Hughes y Taylor- α (Wilson, 2002; Chopra, 2014). Las ecuaciones de este método de integración para el desplazamiento y la velocidad, surgen de truncar la serie de Taylor (Wilson, 2002).

$$v_{t+\Delta t} = v_t + \Delta t \dot{v}_t + \Delta t^2 \left[\left(\frac{1}{2} - \beta \right) \ddot{v}_t + \beta \ddot{v}_{t+\Delta t} \right] \quad (14)$$



$$\dot{v}_{t+\Delta t} = \dot{v}_t + \Delta t[(1 - \gamma)\ddot{v}_t + \gamma\ddot{v}_{t+\Delta t}] \quad (15)$$

De las ecuaciones anteriores, β y γ son factores que deben ser determinados para garantizar la estabilidad y precisión del método. Los valores típicos de estos factores son: $\gamma = \frac{1}{2}$ y $\frac{1}{4} \leq \beta \leq \frac{1}{6}$ (Chopra, 2014). Como casos especiales del método de Newmark se encuentran los métodos de aceleración lineal y aceleración constante promedio, pues el análisis de estas consideraciones para la aceleración conduce a los mismos resultados que considerar las ecuaciones de Newmark con $\gamma = \frac{1}{2}$ y $\beta = \frac{1}{6}$ y en el caso de la aceleración lineal y $\gamma = \frac{1}{2}$ y $\beta = \frac{1}{4}$ para la aceleración constante promedio. El primero de estos métodos es estable si se cumple la relación $\Delta t/T_n \leq 0.51$ y el segundo es incondicionalmente estable (Chopra, 2014). Wilson *et al.* (1972) convirtieron el método de Newmark clásico, o de aceleración lineal en incondicionalmente estable al introducir un factor θ . Con la introducción de este término, las ecuaciones estándares del método de Newmark son modificadas asumiendo que $\Delta t' = \theta \Delta t$ y la función de la carga de la ecuación de movimiento debe ser sustituida mediante:

$$R_t' = R_t + \theta(R_{t+\Delta t} - R_t) \quad \text{con } \theta \geq 1 \quad (16)$$

Wilson (2002) no recomienda el empleo del factor θ porque para sistemas donde sea importante analizar un número alto de modos se introducen errores considerables en la respuesta. El método de Hilber-Hughes y Taylor- α denominado por sus siglas como HHT- α es también una generalización del método de Newmark- β y es idénticamente igual el método de aceleración constante si $\alpha = 0$. Las ecuaciones diferenciales para este método son las mismas que para Newmark- β . La variación fundamental está en la introducción del parámetro α dentro de la ecuación de movimiento resultando la fórmula (17), planteada para sistemas lineales. Los valores habituales de α están entre 0 y -1/3.

$$M\ddot{v}_t + (1 + \alpha)C\dot{v}_t + (1 + \alpha)Kv_t = (1 + \alpha)R_t - \alpha R_t + \alpha C\dot{v}_{t-\Delta t} + \alpha K v_{t-\Delta t} \quad (17)$$

De todos estos métodos de integración directa, el de Newmark- β , específicamente el enfoque de aceleración constante promedio, es uno de los más empleados en

estructuras tipo torre para resolver los análisis dinámicos (Gani y Légeron, 2010; Bentes *et al.*, 2014).

Modelación de una estructura

El estudio se realizó sobre una torre autosoportada de sección transversal cuadrada. La torre presenta una forma troncopiramidal hasta una altura de 45 m, sobre la cual se eleva una torreta de 15 m y más arriba un mástil de 6 m de longitud y sección tubular con un diámetro de 0.35 m y un espesor de 1.68 mm. La dimensión de la base es de 6 m y va disminuyendo hasta una sección de 1.17 m de lado en donde comienza el tramo recto denominado torreta. La torre presenta antenas de dos tipologías, 24 paneles UHF colocados en el mástil y 12 paneles VHF colocados en la torreta. En la Figura 1 se aprecian las secciones transversales de los elementos componentes y la ubicación de las antenas.

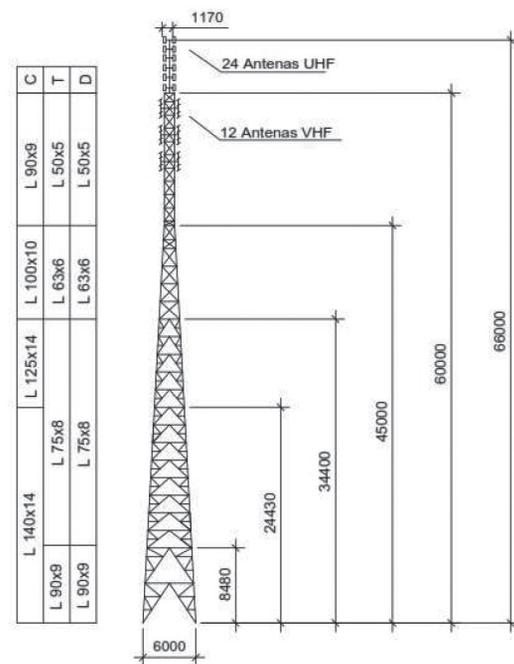
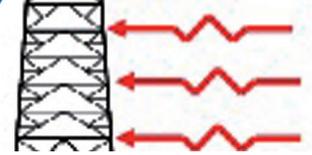


Figura 1: Características geométricas de la torre y ubicación de las antenas

La modelación y análisis se realizó con asistencia del software SAP2000 (2011) versión 14. La torre fue modelada como una estructura tridimensional de barras articuladas en sus extremos, con excepción de las columnas que son elementos continuos. El material es acero y se consideró elástico y lineal con tensión de fluencia de 250 MPa y tensión de rotura de 400 MPa. Las condiciones de apoyo se consideraron articuladas.



Fue realizado un análisis modal llevado a cabo mediante el método de los vectores de Ritz. Para la realización del análisis modal fueron asignadas como masas adiciones a las de la estructuras, las antenas en sus puntos de ubicación. Se determinó que la estructura presenta un único modo de vibración, el primero, de tipo flector, que presenta período de oscilación superior a 1 s, específicamente 1.25 s; y luego muestra algunos otros modos flectores, torsores y axiales, todos con períodos inferiores a 1 s y bajos porcentajes de participación de la masa. La Figura 2 muestra las formas de los tres primeros modos, todos flectores, con períodos de 1.25, 0.35 y 0.29 s respectivamente.

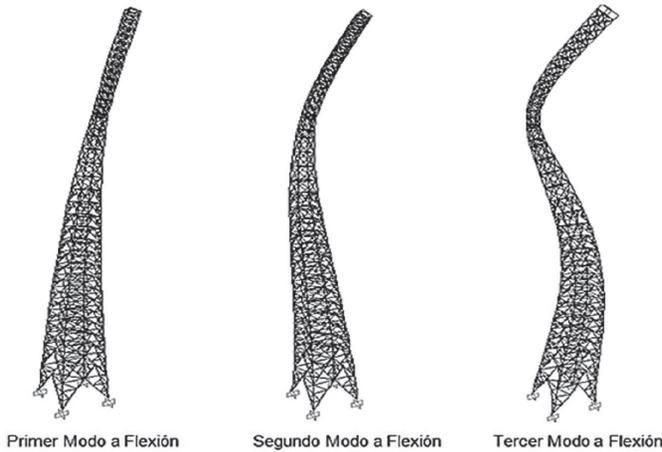


Figura 2: Formas de los primeros tres modos de oscilación de la torre en estudio

Las cargas consideradas fueron las permanentes derivadas del peso propio de los elementos componentes de las antenas y las cargas de viento y sismo las cuales son detalladas a continuación.

Carga de viento

La fuerza de viento a aplicar sobre la estructura fue obtenida de la suma de la componente media (18) y la componente fluctuante (19)

$$\bar{F}(z) = 1/2 \rho_a C_a A_{ref} \bar{U}(z)^2 \quad (18)$$

$$F_u(z, t) = \rho_a C_a A_{ref} \bar{U}(z) u(z, t) \quad (19)$$

De las ecuaciones C_a es el coeficientes de arrastre que se obtuvo de ensayos en túnel de viento previos a este trabajo (Martín, 2014), A_{ref} es el área de referencia, obtenida como el área proyectada de los miembros de la torre sobre una de sus caras, ρ_a es la densidad del aire que toma un valor

de 1.25 kg/m^3 para una temperatura de 15°C y $\bar{U}(z)$ y $u(z, t)$ son la velocidad media y turbulenta a una altura z . La velocidad media del viento $\bar{U}(z)$ varía con la altura y fue obtenida para este estudio mediante la ley logarítmica dada por (e.g. Cao, 2013):

$$\bar{U}(z) = \frac{u_*}{k} \ln\left(\frac{z}{z_0}\right) \quad (20)$$

donde k es la constante de von Karman aproximadamente igual a 0.4, u_* es la velocidad de fricción (3.4 m/s), obtenida mediante la extrapolación del perfil logarítmico para una velocidad media del viento de 45 m/s a una altura de 10 m del nivel del terreno de acuerdo con la norma cubana (NC-285, 2003). El parámetro z_0 es la longitud de rugosidad, asumida para este estudio como 0.05 y z es la altura del punto donde debe ser obtenida la velocidad. Las velocidades medias fueron calculadas para distintas alturas en las que se dividió la torre para el análisis, ellas fueron: 8.48, 14.46, 20.44, 26.42, 32.41, 36.40, 42.38, 45.00, 49.50, 55.50, 60, 61, 62, 63, 64, 65 y 66 m, aproximadamente cada dos niveles de tranques.

La velocidad turbulenta $u(z, t)$ fue obtenida mediante técnicas de simulación de Montecarlo a partir del empleo de la fórmula de generación digital de Shinozuka y Jan (1972) tal como recomiendan varios trabajos (e.g. Zhang *et al.*, 2013; Serrano *et al.*, 2014). Las series turbulentas fueron generadas para las mismas alturas mencionadas arriba. Una representación esquemática de las funciones generadas se muestra en la Figura 3.

Fue considerada la siguiente expresión de von Karman para el autoespectro en correspondencia con referencias internacionales (AS/NZS1170.2, 2011; An *et al.*, 2012; Fu *et al.*, 2012):

$$S_u(\omega) = \frac{4\sigma_u^2 f L_u/z}{n[1 + 70.8(f L_u/z)^2]^{5/6}} \quad (21)$$

Donde $f = \frac{nz}{\bar{U}(z)}$ es la coordenada de Monin, $n = \frac{\omega}{2\pi}$, ω son las frecuencias angulares, L_u es la escala integral de la componente u de la turbulencia en (22) y σ_u^2 es la varianza de la componente u . La varianza es derivada de la relación (23) que existe con la intensidad de turbulencia que es asumida en este trabajo mediante (24).

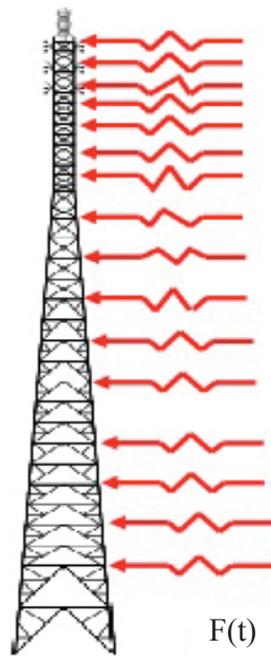
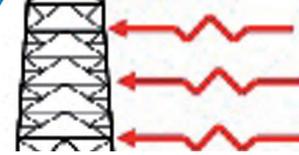


Figura 3: Esquema de las funciones de turbulentas del viento en los niveles de la torre.

$$L_u = 300 \left(\frac{z}{200} \right)^{0.67+0.05\ln(z_o)} \quad (22)$$

$$I = \sigma_u / \bar{U} \quad (23)$$

$$I = 1 / \ln(z/z_o) \quad (24)$$

Para el espectro cruzado entre dos puntos cualesquiera (a las alturas z_1 y z_2), se utilizó (25) y (26) para la función de coherencia espacial.

$$S_{u_1 u_2}(\omega) = \sqrt{S_{u_1}(\omega) S_{u_2}(\omega)} \exp(-f_{12}(\omega)) \quad (25)$$

$$f_{12}(\omega) = \frac{2n\sqrt{k_z^2 \Delta z^2}}{[(\bar{U}(z_1) + \bar{U}(z_2))]} \quad (26)$$

Donde Δz es la distancia vertical entre dos puntos y k_z es el coeficiente de decaimiento tomado como 10 (Solari y Piccardo, 2001). El campo de velocidades generado tiene las siguientes características: número de intervalos de frecuencia y de tiempo $N_\omega = N_t = 2^{14}$, paso de tiempo $\Delta t = 0.05/s$ y frecuencia de corte $\omega_u = 62.8 \text{ rad/s}$. La simulación de las series fue realizada con la asistencia del software Matlab (2013) y dado el carácter aleatorio de la carga

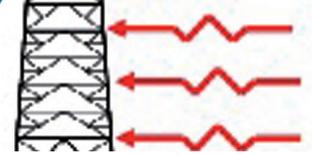
de viento y las recomendaciones de emplear más de una muestra para realizar un análisis estadístico de la respuesta de la estructura (Gani y Légeron, 2010), fueron generadas 10 muestras, cada una contiene las 17 funciones resultantes de la división por alturas de la torre.

Carga de sismo

Para la carga de sismo fueron escogidas las funciones variables con el tiempo, correspondientes al terremoto El Centro. Los datos de las mediciones del terremoto fueron obtenidos de la base PEER (2011). Dos componentes del sismo fueron utilizadas, la correspondiente a la medición Norte-Sur (x) donde el máximo valor de aceleración *PGA* (*Peak Ground Acceleration*) es 0.313g y la medición Este-Oeste (y) donde el PGA es 0.215g. La carga de sismo se consideró actuando simultáneamente en un 100% en el sentido de x y en un 30% en el sentido de y (Amiri *et al.*, 2007b). El intervalo de datos de las mediciones de la aceleración fue de $\Delta t = 0.005 \text{ s}$ (PEER, 2011) y el tiempo total del registro es de 30 s.

Parámetros de los métodos

El método de superposición modal se basa en el análisis modal previo, como quedó definido anteriormente, desarrollado en este estudio mediante los vectores de Ritz. En la medida que el número de modos involucrados en el análisis sea mayor, también lo será la precisión de la respuesta estructural. La cantidad de modos que consideraron Amiri *et al.* (2007a) y Martín y Elena (2012) fueron 20 y 25 respectivamente. En el presente estudio se comenzó el análisis con 20 modos, aumentando a razón de 10 hasta 100 para evaluar la precisión de la respuesta estructural. Tanto para la carga de viento como para la de sismo, de la evaluación resultó que no existen variaciones en la respuesta en más del 0.1% entre el análisis con el menor y el mayor número de modos involucrados. Por otra parte, el tiempo de cómputo consumido tampoco fue considerable de un análisis a otro, pues ninguno presentó más de 20 s, decidiéndose trabajar con el máximo número de modos estudiados. Además del número de modos es necesario definir el tamaño de los intervalos de tiempo Δt , el número de intervalos de tiempo analizados N_t y el amortiguamiento de la estructura. Estos tres últimos parámetros también deben ser definidos en el caso de realizar un análisis por integración directa. Para la superposición modal el tamaño



de Δt no es tan significativo en la precisión de la respuesta como lo es para la integración directa, por lo que se tomaron las consideraciones necesarias para cumplir con los criterios de integración y se asumió el mismo intervalo de tiempo para la superposición modal. Sparling (1995) hizo empleo del método de Newmark- β con aceleración constante promedio y definió que debía ser cumplida la condición $\Delta t \leq T_n/10$, donde T_n el período del modo fundamental de vibración. En la torre estudiada se empleó el mismo método de integración para el análisis bajo carga de viento y de sismo, por lo que el valor del intervalo de tiempo calculado con la relación anterior es de 0.125 s. Sin embargo, se fijó un Δt de 0.05 s para que fuese igual al empleado para generar la carga de viento. En el caso de la carga de sismo se decidió asumir el mismo valor.

El número de intervalos de tiempo analizados N_t , se obtiene de dividir tiempo total del registro de carga entre el Δt definido. Para la carga de viento la extensión del registro es de 819.2 s y en el sismo de 30 s, por lo que N_t adquiere valores de 16384 y 600 respectivamente. Una de las vías para determinar el amortiguamiento es el método de Rayleigh expresado por:

$$C = a_c M + b_c K \quad (27)$$

donde a_c y b_c son factores obtenidos en función de la razón o fracción de amortiguamiento crítico ζ y las frecuencias de la estructura. Sparling (1995) plantea que si el sistema tiene una fracción de amortiguamiento ζ_1 en la frecuencia f_1 y una fracción ζ_2 en la frecuencia f_2 , a_c y b_c pueden ser obtenidos de:

$$b_c = \frac{\zeta_2 f_2 - \zeta_1 f_1}{\pi(f_2^2 - f_1^2)} \quad (28)$$

$$a_c = 4\pi\zeta_1 f_1 - 4\pi^2 b_c f_1^2 \quad (29)$$

De esta forma, la razón de amortiguamiento en cualquier otra frecuencia puede ser definida mediante (30) y es posible obtener mediante un proceso iterativo la matriz de amortiguamiento del sistema.

$$\zeta_f = \frac{a_c}{4\pi f} + \pi b_c f \quad (30)$$

Este procedimiento está implementado en el software

SAP2000 y fue el empleado en este trabajo tanto para la superposición modal como para la integración directa. Fue definido el valor de 0.05 como razón de amortiguamiento crítico en concordancia con varias referencias (e.g. Taillon *et al.*, 2012; Chopra, 2014; Martín, 2014).

Resultados y discusión

Las diferencias entre las técnicas de solución de la ecuación de movimiento fueron evaluadas a través del procesamiento de las reacciones de apoyo y de los desplazamientos resultantes de la aplicación sobre la estructura de las cargas dinámicas de viento y sismo. Para las cargas de viento los resultados que se muestran son los promedios de los máximos valores obtenidos de las diez muestras generadas.

La Figura 4 muestra los desplazamientos experimentados por la torre en función de la altura ante los distintos análisis desarrollados y cargas actuantes. Es posible apreciar que el comportamiento de la estructura es el mismo independientemente del análisis llevado a cabo. Sin embargo, se aprecia una diferencia considerable entre los valores de los máximos desplazamientos presentados ante las cargas de viento y sismo que fueron estudiadas. En cuanto a la respuesta ante una misma carga, evaluada con la técnica de superposición modal o integración directa se percibe claramente en el gráfico que ocurre un solape. En las reacciones de apoyo el comportamiento es el mismo que el evidenciado con los desplazamientos.

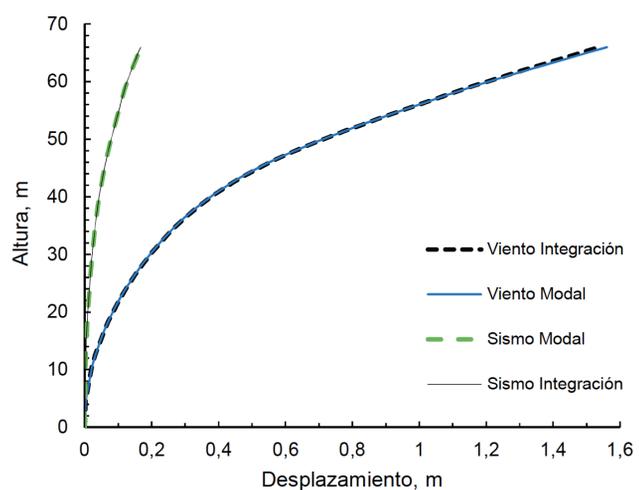
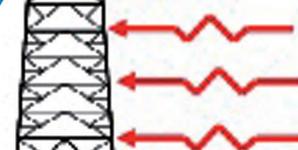


Figura 4: Desplazamiento con la altura evaluados ante las cargas de sismo y viento por integración directa y superposición modal

En la Tabla 1 se muestran las reacciones de apoyo



máximas de tracción T y compresión C y las diferencias porcentuales obtenidas de la comparación entre las dos técnicas de solución de la ecuación de movimiento, con lo cual se reafirma que la respuesta estructural de la torre autosoportada puede ser obtenida por cualquiera de los dos procedimientos estudiados sin experimentar variaciones que superen el 2%.

Tabla 1: Comparaciones de los resultados de las reacciones de apoyo por superposición modal y por integración directa para cargas de viento y sismo

Análisis	Reacciones de apoyo, kN		máxima diferencia, %
	C	T	
Viento Modal	C	1363.69	1.22
	T	1297.11	
Viento Integración	C	1379.36	
	T	1281.43	
Sismo Modal	C	238.01	1.72
	T	131.22	
Sismo Integración	C	238.66	
	T	128.99	

Tabla 2: Comparación de la eficiencia computacional entre la integración directa y la superposición modal

Carga	Análisis	Tiempo de corrida, s	Memoria computacional requerida, MB
Viento	Superposición modal	19	135
	Integración directa	2220	2650
Sismo	Superposición modal	8	29
	Integración directa	1020	223

Unido al análisis de la respuesta estructural, y dada la poca variabilidad de los resultados, se decidió evaluar la eficiencia computacional de cada procedimiento. La Tabla 2 muestra la comparación realizada en cuanto al tiempo que demoran los modelos computacionales en correr y la ocupación en memoria. El estudio ante carga de viento es el que más tiempo demora y capacidad de almacenamiento demanda, por ambos métodos. Entre los dos procedimientos empleados, el de integración directa es el menos eficiente computacionalmente, puesto que demora 116 veces más que el de superposición modal para la carga de viento y 56 veces más para la carga de sismo. Con relación a la

memoria computacional, la integración directa ocupa una capacidad 20 veces mayor para la carga de viento y 8 veces mayor para la de sismo.

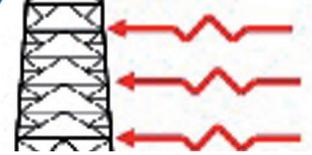
Conclusiones

Del análisis de la estructura puede concluirse que:

1. Se reafirma que las torres autosoportadas presentan un modo fundamental de vibración que es el que mayor incidencia tiene en la respuesta dinámica de la estructura. Este comportamiento fue corroborado con el proceso iterativo de aumento del número de modos desarrollado para el análisis por superposición modal, donde un incremento de 20 a 100 modos no significó una variación en la respuesta en más de un 0.1%.
2. De acuerdo a los resultados del estudio realizado sobre la torre autosoportada, la realización de estudios dinámicos ante series temporales de cargas de viento o sismo puede llevarse a cabo por cualquiera de los dos métodos de resolución de la ecuación de movimiento: superposición modal o integración directa, con variaciones en los resultados inferiores al 2%.
3. Computacionalmente el procedimiento basado en la superposición modal es más eficiente puesto que consume menos tiempo y memoria, validado de acuerdo a los resultados de todos los modelos numéricos realizados.

Referencias

- Aktas, G. and Karasin, A. (2014). Experimental confirmation for the validity of Ritz method in structural dynamic analysis. *Journal of Theoretical and Applied Mechanics* 52(4): 981-993
- Amiri, G.G., Barkhordari, M.A., Massah, S.R. and Vafaei, M.R. (2007a). Earthquake amplification factors for self-supporting 4-legged telecommunication towers. *World Applied Sciences Journal* 2(6), 635-643
- Amiri, G.G., Massah, S.R. and Boostan, A. (2007b). Seismic response of 4-legged self-supporting telecommunication towers. *International Journal of Engineering Transactions B: Applications* 20(2): 107-126
- An, Y., Quan, Y. and Gu, M. (2012). Field measurement of wind characteristics of Typhoon Muifa on the Shanghai World Financial Center. *International Journal of Distributed Sensor Networks* 893739



- AS/NZS 1170.2 (2011). Structural design actions. Part 2: Wind actions. Australian/New Zealand Standard
- Augusti, G., Bartoli, G., Borri, C., Gusella, V. and Spinelli, P. (1992). Wind load and response of broadcasting antennas: Three years of research work in cooperation with RAI. *Journal of Wind Engineering and Industrial Aerodynamics* **43**(1), 2077-2088
- Bentes, J., Menezes, R.C. and Riera, J.D. (2014). Dynamic response of guyed towers in transmission lines submitted to broken conductors. *9th International Conference on Structural Dynamics EUROLYN 2014*, Cunha et al. eds., Porto, Portugal
- Cao, S. (2013). Strong winds and their characteristics. In *Advanced Structural Wind Engineering*. Tamura and Kareem eds., Springer, 1-28
- Chen, J. and Li, L. (2012). Investigation on dynamic response of steel tower structure under time-history wind load. *Applied Mechanics and Materials* **166-169**: 699-707
- Chiu, A.N.L. and Taoka, G.T. (1973). Tower response to actual and simulated wind forces. *Journal of the Structural Division* **99**(9): 1911-1929
- Chopra, A.K. (2014). *Dinámica de Estructuras*. Prentice Hall, México
- Clough, R.W. and Penzien, J. (1993). *Dynamics of Structures*. 2nd ed., McGraw-Hill, New York
- Fu, J.Y., Wu, J.R., Xu, A., Li, Q.S. and Xiao, Y.Q. (2012). Full-scale measurements of wind effects on Guangzhou West Tower. *Engineering Structures* **35**, 120-139
- Gani, F. and Légeron, F. (2010). Dynamic response of transmission lines guyed towers under wind loading. *Canadian Journal of Civil Engineering* **37**(3): 450-465
- Khedr, M. and McClure, G. (1999). Earthquake amplification factors for self-supporting telecommunication towers. *Canadian Journal of Civil Engineering* **26**(2), 208-215
- Martín, P. (2014). *Estudio analítico-experimental de torre autoportada con presencia de antenas bajo la acción del viento*. Tesis de Doctorado, Instituto Superior Politécnico José Antonio Echeverría
- Martín, P. y Elena, V.B. (2012). Análisis sísmico de modelos cubanos de torres autoportadas de telecomunicaciones. *Revista Cubana de Ingeniería* **3**(2): 25-34
- Matlab (2013). Matlab2013a. The MathWorks Inc. Natick, Massachusetts, USA
- NC-285 (2003). Carga de viento. Método de cálculo. Oficina Nacional de Normalización, Cuba
- PEER (2011). PEER strong motion database. Pacific Earthquake Engineering Research Center, Berkeley, USA
- SAP2000 (2011). Computer program v14. Computers and Structures Inc., Berkeley, USA
- Serrano, O.J.P., Mora, E.B. y Salazar, A.R. (2014). Simulación de la componente longitudinal del viento por representación espectral y el análisis dinámico en edificios de cortante. *XIX Congreso Nacional de Ingeniería Estructural*, Puerto Vallarta, Jalisco, México
- Shinozuka, M. and Jan C.M. (1972). Digital simulation of random processes and its applications. *Journal of Sound and Vibration* **25**(1): 111-128
- Solari, G. and Piccardo, G. (2001). Probabilistic 3-D turbulence modeling for gust buffeting of structures. *Probabilistic Engineering Mechanics* **16**(1): 73-86
- Sparling, B.F. (1995). *The dynamic behaviour of guys and guyed masts in turbulent winds*. PhD thesis, The University of Western Ontario, Canada
- Taillon, J.Y., Légeron, F. and Prud'homme, S. (2012). Variation of damping and stiffness of lattice towers with load level. *Journal of Constructional Steel Research* **71**, 111-118
- Wilson, E.L., Farhoomand, I. and Bathe, K.J. (1972). Nonlinear dynamic analysis of complex structures. *Earthquake Engineering & Structural Dynamics* **1**(3), 241-252
- Wilson, E.L. (2002). *Three-dimensional static and dynamic analysis of structures*. 3rd ed., Computer and Structures Inc., Berkeley, USA
- Wilson, E.L., Yuan, M.W. and Dickens, J.M. (1982). Dynamic analysis by direct superposition of Ritz vectors. *Earthquake Engineering & Structural Dynamics* **10**(6), 813-821
- Zhang, Z., Li, H., Li, G., Wang, W. and Tian, L. (2013). The numerical analysis of transmission tower-line system wind-induced collapsed performance. *Mathematical Problems in Engineering* 413275
- Zhou, L. and Zheng, W.X. (2008). Three-dimensional analysis of thick plates by MLS-Ritz method. *International Journal of Structural Stability and Dynamics* **8**(1): 77-101