

# Análisis del comportamiento de un amortiguador de masa sintonizado considerando incertidumbre en los parámetros del sistema para excitaciones sísmicas de alto contenido de frecuencias

Analysis of the behaviour of a tuned mass damper considering uncertainty in the system parameters for high frequency content seismic excitations

DOI: <https://doi.org/10.21703/0718-2813.2024.36.3000>

Fecha de entrega: 10 de mayo 2024  
Fecha de aceptación: 23 de agosto 2024

Gilda Espinoza, Álvaro Suazo-Schwencke y Paulina Ulloa

Universidad del Bío-Bío, Departamento de Ingeniería Civil y Ambiental, Avenida Collao 1202, Casilla 5-C, Concepción, Chile, [asuazo@ubiobio.cl](mailto:asuazo@ubiobio.cl), [gospinoz@ubiobio.cl](mailto:gospinoz@ubiobio.cl), [pulloaurizar@gmail.com](mailto:pulloaurizar@gmail.com)

*Se investiga la eficiencia de un amortiguador de masa sintonizado al controlar un sistema de un grado de libertad, cuando a la razón de masa del AMS y el periodo traslacional desacoplado de la estructura se les incluye incertidumbres de 5, 10 y 20%, en el sentido positivo y negativo con respecto al caso sin incertidumbre. La excitación y el análisis son de tipo estocástico y de alto contenido de frecuencias. Para la inclusión de la incertidumbre se utiliza una expansión en serie de Taylor que considera sólo la aproximación de primer orden. El rango de razones de masa del AMS van desde 0.02 a 0.05, los periodos de la estructura abarcan un rango desde 1.5 a 2.0 s. Los resultados muestran que la inclusión de incertidumbre en la razón de masa y el periodo de la estructura muestra una influencia en los valores de los parámetros óptimos y en la eficiencia del AMS en la reducción de la desviación estándar de desplazamiento de la estructura. Las incertidumbres en los parámetros del sistema tienen una influencia notable y no pueden ser ignoradas. La inclusión de incertidumbre en el periodo de la estructura muestra las mayores variaciones en los parámetros óptimos y reducciones, en especial para razones de masa grandes y estructuras rígidas.*

*Palabras clave: amortiguador de masa sintonizado, incertidumbre en los parámetros, análisis estocástico, excitación de alto contenido de frecuencias*

*The behaviour of a tuned mass damper is investigated when controlling a one degree of freedom system, when uncertainties of 5, 10 and 20% are included in the mass ratio of the AMS and the uncoupled translational period of the structure, in positive and negative sense with respect to the case of uncertainty. The excitation and analysis are of a stochastic type, and of high frequency content. To include uncertainty, a Taylor series expansion is used that considers only the first-order approximation. The range of mass ratios of the AMS ranges from 0.02 to 0.05, the periods of the structure cover a range from 1.5 to 2.0 s. The results show that the inclusion of uncertainty in the mass ratio and the period of the structure shows an influence on the values of the optimal parameters and on the efficiency of the AMS in reducing the standard deviation of displacement of the structure. Including uncertainty in the structure period shows the largest variations in optimal parameters and reductions. Uncertainties in system parameters have a notable influence and cannot be ignored. In general, the advantage of AMS tends to reduce or increase as the level of uncertainty increases in the positive or negative direction.*

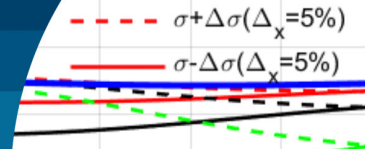
*Keywords: tuned mass damper, parameter uncertainty, stochastic analysis, high frequency content excitation*

## Introducción

Al momento de diseñar cualquier estructura se debe tener presente que esta enfrentará alguna solicitación dinámica. En Chile una de las más relevante es la excitación sísmica. Se han estudiado diversos sistemas que ayudan a disipar la energía en estructuras civiles y a reducir el daño ante

este tipo de solicitación bajo el concepto de seguridad y serviciabilidad, tanto para personas y estructuras. Dentro de estos sistemas se encuentra el amortiguador de masa sintonizado (AMS).

Estos tipos de dispositivos no se rigen por el diseño sismorresistente convencional, en el que se aumenta la



capacidad de elementos estructurales para que resista una demanda sísmica de diseño, es decir, satisfacer la inecuación,  $C$  (capacidad)  $>$   $D$  (demanda). Los dispositivos como el AMS adicionan un sistema dinámico que permite cambiar las propiedades dinámicas del sistema completo, con la finalidad de satisfacer el diseño de reducción de vibración, a través de la modificación de las propiedades dinámicas de la estructura, con el objetivo de disminuir la demanda y mantener o reducir la capacidad.

Un AMS es una masa secundaria que se une a una estructura por medio de un resorte y un amortiguador, absorbiendo la energía cinética de la estructura por medio de su oscilación con el mismo periodo del sistema principal, reduciéndose así la respuesta estructural.

Los primeros estudios relacionados con el AMS se remontan a 1909. Ese año Frahm (1909) patentó un dispositivo de amortiguamiento de vibraciones, consistente en acoplar una masa en una embarcación a través de un elemento de rigidez característica, con el fin de disminuir el movimiento del casquete de un barco. Pese a que esta filosofía fue propuesta inicialmente para un problema particular, la misma patente otorgaba la posibilidad de utilizar este dispositivo en otros sistemas tales como edificios sometidos a excitaciones dinámicas.

Ormondroyd y Den Hartog (1928) presentan la teoría del AMS. Desarrollan matemáticamente el análisis dinámico para una estructura equipada con una aceleración basal mono frecuencial. Desarrollada la teoría básica del AMS, Den Hartog (1940) encuentra los parámetros óptimos de diseño de los dispositivos, que minimizan la respuesta máxima del sistema principal no amortiguado, para excitaciones sísmicas simples y expresadas como expresiones cerradas. Brock (1946) determinó los parámetros de amortiguamiento óptimos para el dispositivo.

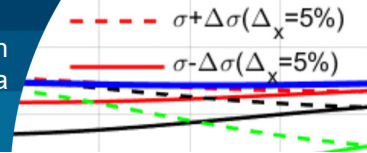
Crandall y Mark (1963) analizan el comportamiento del AMS en el control de una estructura utilizando teoría de vibraciones aleatorias, sometida a una excitación basal de ruido blanco. Sladek y Klingner (1983) analizan el comportamiento AMS cuya función principal es la reducción del efecto del viento en edificios de gran altura. El resultado fue una reducción de la aceleración inducida por el viento hasta un 40%.

Soto-Brito y Ruiz (1999) analizan la efectividad de los

AMS en edificios no lineales sometidos a sismos de media y alta intensidad del sistema. Concluyen que a medida que aumenta la intensidad del movimiento sísmico, la eficiencia del AMS disminuye. Miranda (2005) presenta un modelo teórico basado en la energía para un sistema de dos grados de libertad. Se analizan amortiguadores de masa sintonizados como una forma de aumentar la amortiguación modal, con el fin de inducir una disminución de la respuesta sísmica de las estructuras de manera controlada. Se propone el modelo para ser aplicado a través de un procedimiento numérico iterativo para identificar los parámetros óptimos.

Dentro de los sistemas de protección sísmicos pasivos, que no necesitan de una fuente de energía externa para su funcionamiento está el ACLS. Este consiste en un tubo en U que posee en su interior líquido, generalmente agua, que, ante un movimiento en su base, oscila con una frecuencia propia. En su parte inferior, posee un orificio que provoca una pérdida carga (Shum, 2009). Debbarma *et al.* (2010) observan que, si los parámetros óptimos de los ACLS no están perfectamente sintonizados en el modo de vibración que se quiere controlar, la eficiencia de los amortiguadores puede disminuir. Esto implica que se debiera considerar la presencia de incertidumbre en los parámetros del sistema. Para estudiar este efecto utilizan la teoría de perturbación de la matriz utilizando la expansión de la serie de Taylor de primer orden. Realizan un estudio numérico para obtener el efecto de las incertidumbres de los parámetros de diseño y rendimiento del ACLS. Este artículo servirá de base para seguir la línea investigativa del efecto de la incertidumbre en los parámetros óptimos, pero considerando el AMS en vez del ACLS.

Espinoza *et al.* (2020) estudian el comportamiento de una estructura sometida a una excitación sísmica estocástica, controlada por un amortiguador de columna de líquido sintonizado (ACLS) óptimo, cuando se introduce incertidumbre en algunos parámetros del sistema. Se realiza una linealización estadística equivalente, para incluir la naturaleza no lineal del ACLS. La incertidumbre es ingresada en la razón de masa, la razón de longitud y el coeficiente de pérdida de carga. Se encuentra que una introducción de incertidumbre en el periodo de la estructura produce una gran sensibilidad en los parámetros óptimos del ACLS, la eficiencia y el RMS del desplazamiento de la estructura.



Espinoza *et al.* (2021) estudian el comportamiento de los parámetros óptimos y de la eficiencia del amortiguador combinado sintonizado (ACS), consistente en la combinación entre un AMS y un ACLS, en el control de una estructura sometida a excitación sísmica estocástica de alto contenido de frecuencias, cuando se incorpora incertidumbre en la razón de masa y la razón de longitud. Los resultados muestran que el parámetro óptimo del ACS más sensible en su valor es el coeficiente de pérdida de carga, ante la introducción de incertidumbre en su razón de longitud. La eficiencia del ACS y RMS de desplazamiento de la estructura principal es prácticamente insensible a una incertidumbre menor a un 10%, tanto de la razón de masa y de la razón de longitud.

Esta investigación tiene por objetivo analizar el comportamiento de los parámetros óptimos del AMS y su eficiencia en el control de una estructura, sometida a una excitación sísmica estocástica de alto contenido de frecuencia, cuando existe incertidumbre en los parámetros del sistema.

## Modelo estructural

En la Figura 1 se puede observar el modelo utilizado en la investigación. Este está compuesto por un amortiguador de masa sintonizado (AMS) unido a la estructura principal mediante un resorte y amortiguador. Las propiedades de la estructura son el amortiguamiento  $C_S$ , la rigidez  $K_S$  y la masa  $M_S$ . Por otra parte, el AMS tiene una masa  $M_T$ , rigidez  $K_T$  y amortiguamiento  $C_T$ . Además  $X_1(t)$  y  $X_T(t)$ , corresponden a los grados de libertad del modelo, los

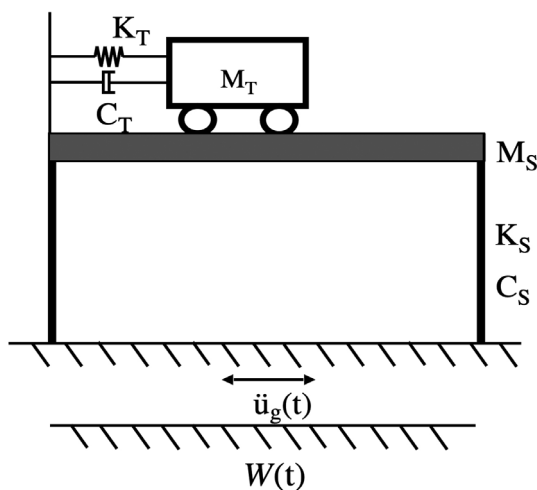


Figura 1: Modelo de estructura lineal con AMS.

cuales son el desplazamiento lateral del sistema principal y al desplazamiento lateral del AMS, respectivamente.

Se considera un filtro que posee alta potencia en un rango de frecuencias medias y altas, denominándose filtro de ancho de banda amplio (BBP).

## Ecuaciones de movimiento

El sistema dinámico posee dos ecuaciones de equilibrio dinámico correspondiente a los grados de libertad del modelo.

$$(M_S + M_T)\ddot{X}_1 + M_T\ddot{X}_T + C_S\dot{X}_1 + K_S X_1 + (M_S + M_T)\ddot{u}_g = 0 \quad (1)$$

$$M_T\ddot{X}_1 + M_T\ddot{X}_T + C_T\dot{X}_T + K_T X_T = -(M_T\ddot{u}_g) \quad (2)$$

Expresando en forma matricial, el sistema de dos ecuaciones diferenciales de segundo orden se obtiene la ecuación (3).

$$[\mathbf{M}]\{\ddot{\mathbf{X}}(t)\} + [\mathbf{C}]\{\dot{\mathbf{X}}(t)\} + [\mathbf{K}]\{\mathbf{X}(t)\} = -[\mathbf{m}^*]\{1\}\ddot{U}_g(t) \quad (3)$$

Las matrices  $\mathbf{M}$ ,  $\mathbf{m}^*$ ,  $\mathbf{C}$ ,  $\mathbf{K}$  se muestran a continuación:

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} 1 + \mu_t & \mu_t \\ \mu_t & \mu_t \end{bmatrix} \quad (4)$$

$$\mathbf{m}^* = \begin{bmatrix} 1 + \mu_t & 0 \\ 0 & \mu_t \end{bmatrix} \quad (5)$$

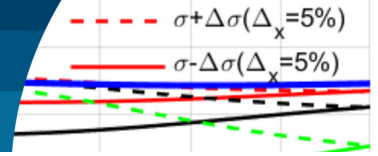
$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 2\omega_S\xi_S & 0 \\ 0 & 2\omega_t\xi_t\mu_t \end{bmatrix} \quad (6)$$

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} \omega_S^2 & 0 \\ 0 & \omega_t^2\mu_t \end{bmatrix} \quad (7)$$

donde  $\mathbf{M}$  es la matriz de masa del modelo,  $\mathbf{m}^*$  es la matriz de influencia del input,  $\mathbf{C}$  es la matriz de amortiguamiento de la estructura más AMS,  $\mathbf{K}$  es la matriz de rigidez del sistema completo y  $\mu_t = \frac{M_T}{M_S}$  es la razón de masa del AMS.

## Análisis probabilístico en el dominio del tiempo

Se realiza un análisis estocástico en el dominio del tiempo con el objetivo de obtener los parámetros óptimos del AMS para un input aleatorio. En esta investigación se



considerará una excitación estocástica de alto contenido de frecuencias. El input aleatorio se obtuvo pasando una excitación de ruido blanco a través de un doble filtro de Clough – Penzien, compuesto por un filtro que simula el estrato de suelo y un segundo filtro que corrige las frecuencias bajas.

## Representación en espacio de estado sin filtro

En las ecuaciones (8) y (9) se muestran las matrices de estado  $\mathbf{A}$  y  $\mathbf{B}$  de la estructura más el AMS, y de colocación del input, respectivamente.

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{2 \times 2} & \mathbf{I}_{2 \times 2} \\ -\mathbf{M}^{-1}\mathbf{K} & -\mathbf{M}^{-1}\mathbf{C} \end{bmatrix} \quad (8)$$

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{2 \times 1} \\ -\mathbf{M}^{-1}\mathbf{m}^* \end{bmatrix} \quad (9)$$

La ecuación (10) corresponde al vector de estado del sistema de la estructura principal y el AMS, sin la inclusión de filtro. La ecuación de estado se puede expresar como se muestra la ecuación (11).

$$\mathbf{X}_2 = \{X_1 \quad X_T \quad \dot{X}_1 \quad \dot{X}_T\}^T \quad (10)$$

$$\dot{\mathbf{X}}_2 = \mathbf{A} \mathbf{X}_2 + \mathbf{B} \ddot{u}_g \quad (11)$$

## Filtro utilizado en el análisis

La ecuación (12) corresponde a la ecuación de output, donde  $\mathbf{X}_f$  corresponde al vector estado del filtro; los dos primeros elementos representan el filtro debido al estrato de suelo y los otros dos consideran el filtro que corrige las frecuencias bajas.

$$\ddot{u}_g = \mathbf{C}_f \mathbf{X}_f \quad (12)$$

$$\mathbf{X}_f = \{x_g \quad \dot{x}_g \quad x_f \quad \dot{x}_f\}^T \quad (13)$$

A continuación, se muestra la matriz de estado del filtro (ecuación (14)), la matriz de output del filtro (ecuación (15)) y la matriz de colocación de la excitación (ecuación (16)).

$$\mathbf{A}_f = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\omega_g^2 & -2\xi_g\omega_g & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \omega_f^2 & 2\xi_f\omega_f & -\omega_f^2 & -2\xi_f\omega_f \end{bmatrix} \quad (14)$$

$$\mathbf{C}_f = \begin{bmatrix} \omega_g^2 & 2\xi_g\omega_g & -\omega_f^2 & -2\xi_f\omega_f \end{bmatrix} \quad (15)$$

$$\mathbf{B}_f = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (16)$$

La ecuación (17) es el estado del filtro.

$$\dot{\mathbf{X}}_f = \mathbf{A}_f \mathbf{X}_f + \mathbf{B}_f \mathbf{W}(t) \quad (17)$$

Donde  $\mathbf{W}(t)$  es la intensidad de ruido blanco en la roca. Su valor se obtiene a partir del valor de Peak Ground Acceleration (PGA) considerado en el análisis.

$$\mathbf{A}_w = \omega_g^4 (\xi_g \omega_f + \xi_f \omega_g) + 4\xi_g^2 \omega_g^2 (\xi_g \omega_f^3 + \xi_f \omega_g^3) + 4\xi_g \xi_f \omega_g \omega_f (\xi_g \omega_f + \xi_f \omega_g) \quad (18)$$

$$\mathbf{B}_w = 2\xi_g \xi_f \left( (\omega_g^2 - \omega_f^2)^2 + 4\omega_g^2 \omega_f^2 (\xi_g^2 + \xi_f^2) + 4\xi_g \xi_f \omega_g \omega_f (\omega_g^2 - \omega_f^2) \right) \quad (19)$$

$$\mathbf{W}(t) = \frac{\text{PGA} \cdot \mathbf{B}_w}{3\pi \mathbf{A}_w} \quad (20)$$

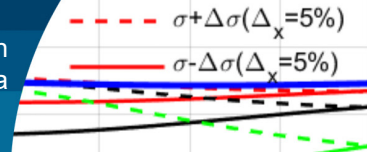
Finalmente expandiendo el estado para incluir el doble filtro, se obtiene la ecuación (21) de estado extendida del sistema estructura-AMS-filtro.

$$\begin{Bmatrix} \dot{\mathbf{X}}_2 \\ \dot{\mathbf{X}}_f \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{4 \times 4} & \mathbf{B}_{4 \times 1} \mathbf{C}_{f_{1 \times 4}} \\ \mathbf{0}_{4 \times 4} & \mathbf{A}_{f_{4 \times 4}} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{X}_2 \\ \mathbf{X}_f \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \mathbf{0}_{4 \times 1} \\ \mathbf{X}_{f_{4 \times 1}} \end{Bmatrix} \mathbf{W}(t) \quad (21)$$

$$\mathbf{X}_3 = \{\mathbf{X}_2 \quad \mathbf{X}_f\}^T \quad (22)$$

$$\dot{\mathbf{X}}_3 = \mathbf{A}_1 \mathbf{X}_3 + \mathbf{B}_1 \mathbf{W}(t) \quad (23)$$

Los parámetros del filtro de ancho de banda amplio fueron obtenidos mediante el ajuste por mínimos cuadrados de la Función de Densidad de Potencia Espectral de un sismo artificial derivado del espectro de la norma NCh2745 (2013) para suelo tipo B (Figura 2a). La Densidad de Potencia Espectral de cada una de las excitaciones se ajusta a través del filtro de Clough-Penzien modificado (Figura 2b).



$$S_g(\omega) = S_0 \frac{\omega_g^4 + 4\xi_g^2 \omega_g^2 \omega^2}{(\omega_g^2 - \omega^2)^2 + 4\xi_g^2 \omega_g^2 \omega^2} \frac{\omega^4}{(\omega_f^2 - \omega^2)^2 + 4\xi_f^2 \omega_f^2 \omega^2} \quad (24)$$

En la ecuación (24)  $S_0$ ,  $\omega_g$ ,  $\xi_g$ ,  $\omega_f$  y  $\xi_f$  son parámetros ajustados por mínimos cuadrados. En la Tabla 1 se entrega los parámetros del filtro Clough – Penzien para los dos filtros considerados, donde  $S_0$  es la intensidad del ruido blanco,  $\omega_g$  y  $\xi_g$  son la frecuencia y la amortiguación del filtro que simula el estrato del suelo, respectivamente;  $\omega_f$  y  $\xi_f$  son la frecuencia y el amortiguamiento del filtro que corrigen las frecuencias bajas.

Tabla 1: Parámetros del filtro de Clough – Penzien para los procesos aleatorios utilizados.

Tipo de entrada	Parámetros				
	$S_0$	$\omega_g$ , rad/s	$\xi_g$	$\omega_f$ , rad/s	$\xi_f$
AB-Amplio	207.23	16.57	0.491	3.02	0.48

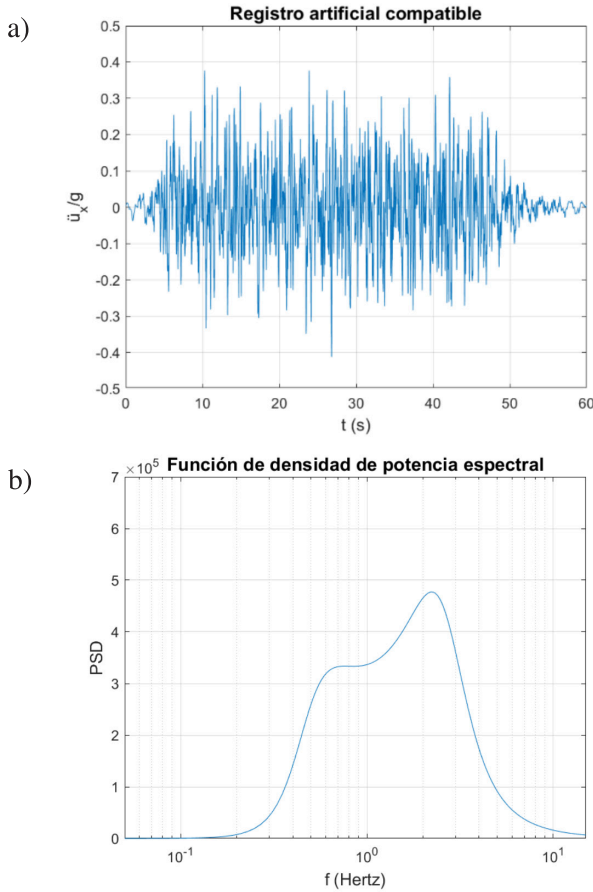


Figura 2: (a) Registro artificial compatible con el espectro NCh2745 (2013) para suelo tipo B y (b) función de densidad de potencia espectral BBP.

## Incertidumbre en los parámetros

Los parámetros a los que se les ingresará incertidumbre son la razón de masa ( $\mu_i$ ) y el periodo de la estructura principal ( $T_s$ ). Las variaciones serán del 5, 10 y 20% de los parámetros con respecto al valor calculado sin incertidumbre, y se observará el impacto de la incertidumbre en el valor de los parámetros óptimos de diseño del AMS y en su eficiencia. La matriz y el vector contienen las propiedades dinámicas del sistema estructura-AMS. En base a eso, se incluirá incertidumbre en los parámetros antes mencionados.

## Obtención de matriz de covarianza

Para la obtención de la matriz de covarianza se resolverá la ecuación de Lyapunov. La potencia de ruido blanco se obtuvo considerando que la varianza de la aceleración del suelo a la entrada del sistema debe ser igual a:

$$\sigma_{\ddot{u}_g}^2 = \frac{PGA}{3} \quad (25)$$

$$W(t) = \frac{\sigma_{\ddot{u}_g}^2 \cdot B_w}{\pi A_w} \quad (26)$$

donde PGA es el Peak Ground Acceleration considerado. En este estudio se consideró un PGA de 0.25g. La ecuación (27) es la ecuación de Lyapunov:

$$\mathbf{A}_1 \mathbf{R} + \mathbf{R} \mathbf{A}_1^T + \mathbf{B}_1 \mathbf{W} \mathbf{B}_1^T = 0 \quad (27)$$

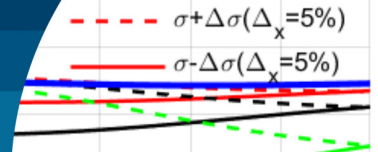
donde  $\mathbf{R}$  corresponde a la matriz de covarianza del sistema completo y  $W(t)$  a la intensidad del ruido blanco.

Para incluir la incertidumbre en los parámetros, al obtener la matriz de covarianza, las matrices del sistema  $\mathbf{A}_1$ ,  $\mathbf{B}_1$  y  $\mathbf{R}$  se deben aproximar en series de Taylor de primer orden.

$$\mathbf{A}_1 = \bar{\mathbf{A}}_1 + \sum_{i=1}^m \frac{\partial \mathbf{A}_1}{\partial x_i} \delta x_i + \dots, \quad (28)$$

$$\mathbf{B}_1 = \bar{\mathbf{B}}_1 + \sum_{i=1}^m \frac{\partial \mathbf{B}_1}{\partial x_i} \delta x_i + \dots, \quad (29)$$

$$\mathbf{R} = \bar{\mathbf{R}} + \sum_{i=1}^m \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial x_i} \delta x_i + \dots, \quad (30)$$



Donde  $\bar{\mathbf{A}}_1$ ,  $\bar{\mathbf{B}}_1$  y  $\bar{\mathbf{R}}$  representan la matriz correspondiente al valor nominal de la incertidumbre en los parámetros. Sustituyendo las ecuaciones (28), (29) y (30) en (27), se obtiene lo siguiente:

$$\left( \bar{\mathbf{A}}_1 + \sum_{i=1}^m \frac{\partial \mathbf{A}_1}{\partial x_i} \delta x_i + \dots \right) \left( \bar{\mathbf{R}} + \sum_{i=1}^m \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial x_i} \delta x_i + \dots \right) + \left( \bar{\mathbf{R}} + \sum_{i=1}^m \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial x_i} \delta x_i + \dots \right) \left( \bar{\mathbf{A}}_1 + \sum_{i=1}^m \frac{\partial \mathbf{A}_1}{\partial x_i} \delta x_i + \dots \right) + \left( \bar{\mathbf{B}}_1 + \sum_{i=1}^m \frac{\partial \mathbf{B}_1}{\partial x_i} \delta x_i + \dots \right) = 0 \quad (31)$$

Dejando de lado el término de orden superior y las ecuaciones del término del mismo orden, la incertidumbre en los parámetros se puede obtener como:

$$\mathbf{A}_1 \bar{\mathbf{B}}_1 + \bar{\mathbf{R}} \mathbf{A}_1^T + \bar{\mathbf{B}}_1 \mathbf{W} = 0 \quad (32)$$

$$\bar{\mathbf{A}}_1 \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial x_i} + \frac{\partial \mathbf{A}_1}{\partial x_i} \bar{\mathbf{R}} + \bar{\mathbf{R}} \frac{\partial \mathbf{A}_1^T}{\partial x_i} + \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial x_i} \mathbf{A}_1^T + \bar{\mathbf{B}}_1 \mathbf{W} = 0 \quad (33)$$

Para encontrar la RMS del desplazamiento se deben obtener la matriz de covarianza media  $\bar{\mathbf{R}}$  y la matriz de sensibilidades de primer orden de la matriz de covarianza  $\frac{\partial \mathbf{R}}{\partial x_i}$ , se han resuelto dos ecuaciones de Lyapunov, una sin incertidumbre (27) y otra con incertidumbre (32).

La matriz de covarianza media se puede obtener de la ecuación (33), considerando el valor medio de las matrices de parámetros del sistema  $\bar{\mathbf{A}}_1$  y  $\bar{\mathbf{B}}_1$ , sustituyendo el valor medio de los parámetros del modelo, mientras que las sensibilidades de primer orden de la matriz de covarianza  $\frac{\partial \mathbf{R}}{\partial x_i}$  se pueden obtener resolviendo la ecuación (33).

$$\sigma_x = \bar{\sigma}_x \pm \sum_{i=1}^m \frac{\partial \sigma_x}{\partial x_i} \delta x_i \dots, \quad (34)$$

$$\begin{cases} \sigma_{x_{up}} = \bar{\sigma}_x + \sum_{i=1}^m \frac{\partial \sigma_x}{\partial x_i} \delta x_i \pm \dots, \\ \sigma_{x_{low}} = \bar{\sigma}_x - \sum_{i=1}^m \frac{\partial \sigma_x}{\partial x_i} \delta x_i \pm \dots, \end{cases}$$

donde :

$$\sigma_x = \sqrt{R(1,1)} \quad (35)$$

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} = \frac{1}{2} \left( \frac{\frac{\partial R(1,1)}{\partial x}}{\sqrt{R(1,1)}} \right) \quad (36)$$

donde  $\sigma_x$ , se obtiene de la ecuación de Lyapunov sin incertidumbre, mientras que  $\frac{\partial \sigma_x}{\partial x_i}$ , de la ecuación de Lyapunov con incertidumbre.

## Procedimiento de optimización

Los parámetros por optimizar son la frecuencia y el amortiguamiento del AMS, y el funcional de optimización son la razón entre la desviación estándar del desplazamiento del sistema principal con AMS y la desviación estándar del desplazamiento del sistema principal sin AMS, tanto para las tres condiciones de incertidumbre positiva, negativa y cuando no se considera incertidumbre, es decir:

Función objetivo 1 ( $FO_1$ )

$$\text{Minimizar } FO_1 \left( \frac{\sigma_{x_{1cAMS}}}{\sigma_{x_{1sAMS}}} \right) \quad (37)$$

$$\begin{aligned} &\text{Encontrar: } \omega_t, \xi_t \\ &\text{Sujeto a: } 0.3\omega_1 < \omega_t < 1.5\omega_1 \\ &\quad \quad \quad 0 < \xi_t < 0.5 \end{aligned}$$

Función objetivo 2 ( $FO_2$ )

$$\text{Minimizar } FO_2 \left( \frac{\sigma_{x_{1lowcAMS}}}{\sigma_{x_{1lowsAMS}}} \right) \quad (38)$$

$$\begin{aligned} &\text{Encontrar: } \omega_t, \xi_t \\ &\text{Sujeto a: } 0.3\omega_1 < \omega_t < 1.5\omega_1 \\ &\quad \quad \quad 0 < \xi_t < 0.5 \end{aligned}$$

Función objetivo 3 ( $FO_3$ )

$$\text{Minimizar } FO_3 \left( \frac{\sigma_{x_{1upcAMS}}}{\sigma_{x_{1upsAMS}}} \right) \quad (39)$$

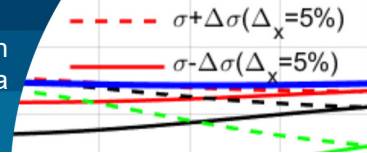
$$\begin{aligned} &\text{Encontrar: } \omega_t, \xi_t \\ &\text{Sujeto a: } 0.3\omega_1 < \omega_t < 1.5\omega_1 \\ &\quad \quad \quad 0 < \xi_t < 0.5 \end{aligned}$$

Los rangos de las restricciones  $\omega_t$  y  $\xi_t$  se seleccionaron tal que no se alcanzaran los límites de optimización.

## Resultados

### Influencia de la razón de masa en los parámetros óptimos

En las Figuras 2 y 3 se presenta el comportamiento óptimo del AMS con respecto a la razón de masa ( $\mu_t$ ), la que se define como la razón entre la masa de AMS y la masa de la estructura principal, para amortiguamientos de la estructura ( $\xi_s$ ) de 0.02 y 0.05, respectivamente. La primera fila



muestra la razón de frecuencia óptima del AMS ( $\omega_{t\text{opt}}$ ) con respecto a la frecuencia de base fija del sistema principal ( $\omega_s$ ) y la segunda fila la razón de amortiguamiento óptimo del AMS ( $\xi_{t\text{opt}}$ ). Los dos parámetros óptimos del AMS se analizan en un rango de masa de 0.01 a 0.05 y tres periodos traslacionales desacoplados del sistema principal ( $T_s$ ), 1.5, 2.0 y 2.5 s.

La Figura 2 muestra que, a mayor incertidumbre, la desviación del valor de los parámetros óptimos con respecto al valor determinístico disminuye con el aumento de la razón de masa. Por otra parte, a medida que el periodo traslacional de la estructura es mayor, la incidencia de la incertidumbre en el valor de la razón de frecuencias óptimas del AMS, con respecto al aumento de la razón de masa es levemente menor. Con respecto a la razón de amortiguamiento óptimo del AMS, la influencia de la incertidumbre es mayor con respecto al valor sin incertidumbre, y aumenta con el aumento de la razón de masa.

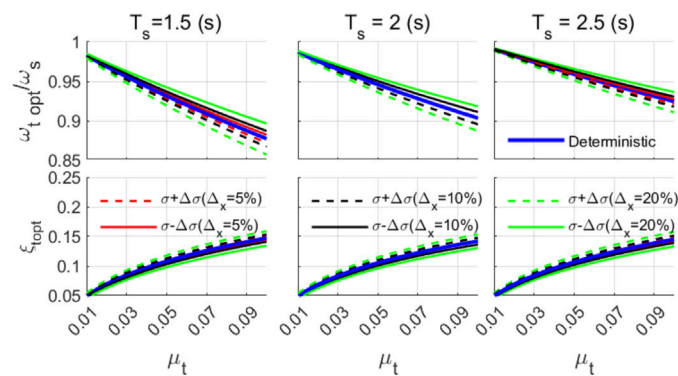


Figura 2: Razón de frecuencias y amortiguamientos óptimos del AMS ( $\xi_s = 0.02$ )

Se observa en la Figura 3 que el comportamiento de los parámetros óptimos del AMS, ante la inclusión de incertidumbre en la razón de masa es prácticamente el mismo al de la Figura 2, es decir, son insensibles a la razón de amortiguamiento de la estructura principal. Esto se produciría debido a que el dispositivo controla a la estructura a través de la disipación de energía de amortiguamiento, acercando su frecuencia a la de la estructura principal, llegando a una resonancia amortiguada, concentrando el movimiento de la estructura en el dispositivo y controlando la estructura.

Según los resultados de este estudio, esto se produce para

razones de amortiguamiento del dispositivo óptimas muy superiores, del orden del 10% a 15%, para los niveles de amortiguamiento de la de la estructura principal, de 2% a 5%, influyendo en menor medida a los resultados obtenidos.

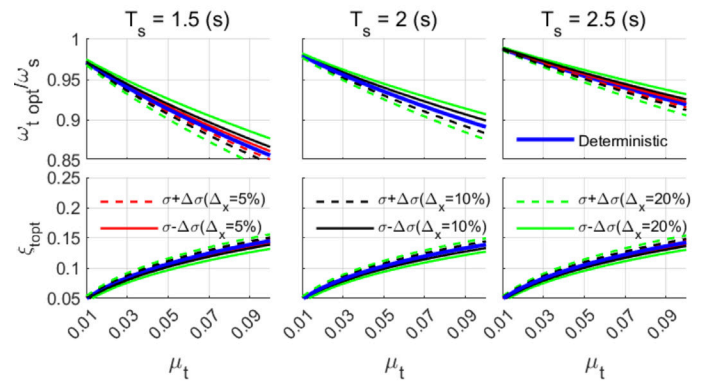


Figura 3: Razón de frecuencias y amortiguamientos óptimos del AMS ( $\xi_s = 0.05$ )

### Influencia del periodo de la estructura en los parámetros óptimos

En las Figuras 4 y 5 se presenta el comportamiento óptimo del AMS, con respecto periodo de base fija de la estructura ( $T_s$ ), con amortiguamientos de la estructura ( $\xi_s$ ) de 0.02 y 0.05, respectivamente. La primera fila muestra la razón de frecuencia óptima del AMS ( $\omega_{t\text{opt}}$ ), con respecto a la frecuencia de base fija del sistema principal ( $\omega_s$ ) y la segunda fila, la razón de amortiguamiento óptimo del AMS ( $\xi_{t\text{opt}}$ ). Los dos parámetros óptimos del AMS se analizan en un rango de periodo de 1.5 a 2.5 s y tres razones de masa del AMS ( $\mu_t$ ), 0.02, 0.03 y 0.05.

En la Figura 4 se aprecia que existe una gran influencia de la incertidumbre en los parámetros óptimos del AMS. A medida que la razón de masa es mayor, se observa que la variación del caso sin incertidumbre es mayor. En el caso del amortiguamiento óptimo del AMS, las incertidumbres llevan a un valor menor a ese parámetro óptimo sin incertidumbre.

La Figura 5 muestra que para una razón de amortiguamiento de un 5%, la incertidumbre en los parámetros tiene una menor influencia en los parámetros óptimos del AMS, que en el caso de un amortiguamiento menor de la estructura. Por otra parte, la influencia de la incertidumbre en el comportamiento de los parámetros óptimos es análoga que para un amortiguamiento mayor de la estructura.

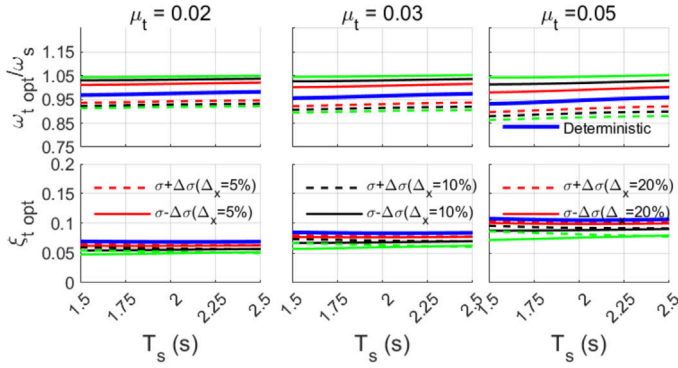
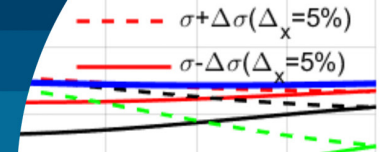


Figura 4: Razón de frecuencias y amortiguamientos óptimos del AMS ( $\xi_s = 0.02$ )

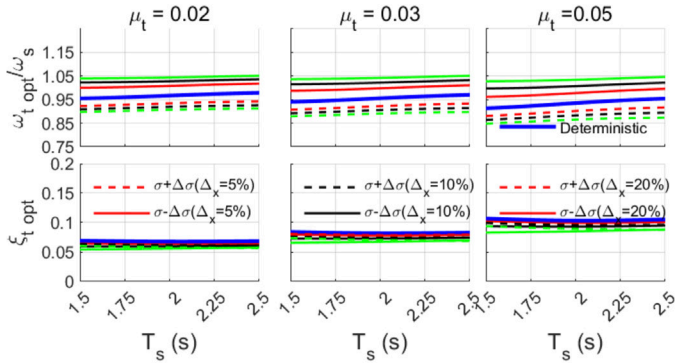


Figura 5: Razón de frecuencias y amortiguamientos óptimos del AMS ( $\xi_s = 0.05$ )

### Eficiencia del AMS con respecto a la razón de masa

En las Figuras 6 y 7 se analiza la reducción de la desviación estándar de desplazamiento R(BBP) con respecto a la razón de masa ( $\mu_t$ ). La reducción de R(BBP) se define como la respuesta o la varianza de respuesta del sistema con AMS dividido por la varianza de respuesta del sistema sin AMS, con amortiguamientos de la estructura ( $\xi_s$ ) de 0.02 y 0.05, respectivamente. En las columnas se encuentran tres periodos ( $T_s$ ), de 1.5 s, que representa una estructura rígida, 2.0 s, que representa una rigidez intermedia, y 2.5 s, que corresponde a una flexible. Se observa en ambas figuras que la reducción de la desviación estándar de desplazamiento es sensible a la razón de amortiguamiento del sistema principal, en estructuras con menor amortiguamiento, al AMS tiene un comportamiento más eficiente. En cuanto al comportamiento de la incertidumbre en la eficiencia, se observa que es prácticamente insensible al amortiguamiento de la estructura principal. Por otra parte, la influencia de la incertidumbre en los parámetros con respecto al valor de la razón de masa es prácticamente nula.

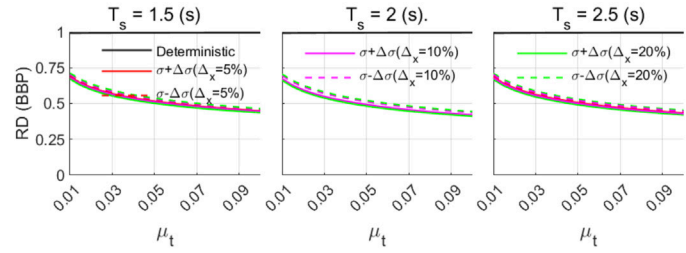


Figura 6: Reducción del AMS óptimo ( $\xi_s = 0.02$ ).

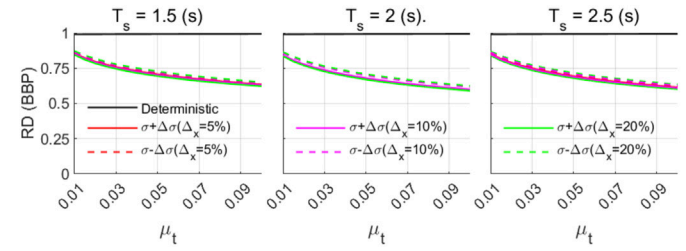


Figura 7: Reducción del AMS óptimo ( $\xi_s = 0.05$ ).

### Eficiencia del AMS con respecto al periodo de la estructura

En las Figuras 8 y 9 se analiza el comportamiento de la eficiencia del AMS con respecto periodo de base fija de la estructura ( $T_s$ ) con amortiguamientos de la estructura ( $\xi_s$ ) de 0.02 y 0.05, respectivamente. En ambas se muestra la reducción (RD) o eficiencia del AMS, el que se analiza en un rango de periodo de 1.5 a 2.5 s y tres razones de masa del AMS ( $\mu_t$ ), 0.02, 0.03 y 0.05. Se observa en la Figura 8 un cambio en el comportamiento de los parámetros óptimos con respecto a la incertidumbre de los parámetros. En el caso sin incertidumbre la reducción prácticamente no depende del periodo de la estructura. Sin embargo, en el caso con incertidumbre de un 20% se produce una menor eficiencia en la reducción para periodos más altos.

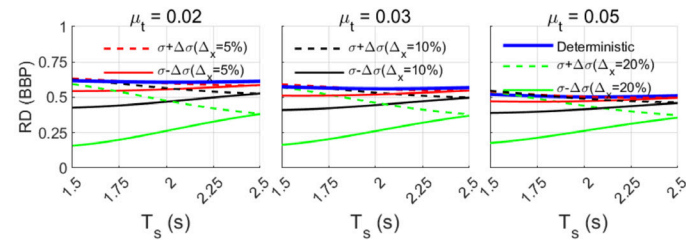


Figura 8: Reducción del AMS óptimo ( $\xi_s = 0.02$ )

Con un amortiguamiento de sistema principal de 0.05 (Figura 9) se observa un comportamiento similar a  $\xi_s = 0.02$ , aunque alcanza menores eficiencias.



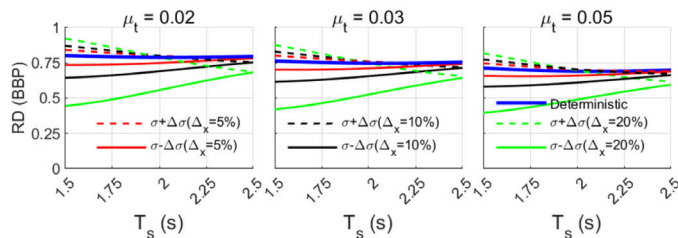
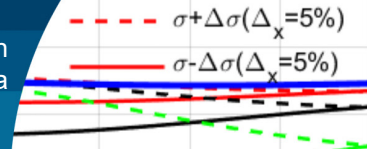


Figura 9: Reducción del AMS óptimo ( $\xi_s = 0.05$ ).

## Conclusiones

En todos los análisis realizados, el ingreso de incertidumbre en la razón de masa y en el periodo de la estructura, muestra una influencia en los valores de los parámetros óptimos y en la reducción del AMS.

La inclusión de incertidumbre en el periodo de la estructura muestra las mayores variaciones en el valor de los parámetros óptimos del AMS y reducción de la desviación de desplazamiento de la estructura.

Las incertidumbres en los parámetros del sistema tienen una influencia notable y no pueden ser ignoradas.

La eficiencia del AMS aumenta a medida que el valor de incertidumbre es más alto en el periodo de la estructura.

## Agradecimientos

Los autores agradecen a la Universidad del Bío-Bío, por el financiamiento otorgado para el desarrollo de esta investigación, a través de Proyecto Regular de Investigación UBB. DIUBB 2260531 IF/R.

## Referencias

Brock, J.E. (1946). A note on the damped vibration absorber. *Journal of Applied Mechanics* 13(4): A284. doi.org/10.1115/1.4009588

Crandall, S.H. and Mark, W.D. (1963). *Random vibration in Mechanical Engineering*. Academic Press, New York, US.

Debbarma, R., Chakraborty, S. and Ghosh, S. (2010). Optimum design of tuned liquid column dampers under stochastic earthquake load considering uncertain bounded system parameters. *International Journal of Mechanical Sciences* 52(10): 1385-1393. doi.org/10.1016/j.ijmecsci.2010.07.004

Den Hartog, J.P. (1940). *Mechanical vibrations*. McGraw-Hill, New York, US.

Espinoza, G., Saavedra, J., Gajardo, K., Suazo, A. y Cifuentes, C. (2021). Eficiencia de un amortiguador de columna de líquido sintonizado considerando una excitación sísmica de alto contenido de frecuencias e incertidumbre. *Obras y Proyectos* 29: 67-79. doi.org/10.4067/S0718-28132021000100067

Espinoza, G., Sagredo, G. y Suazo, A. (2020). Análisis de la eficiencia de un amortiguador combinado sintonizado con incertidumbre en los parámetros sometido a una excitación sísmica de alto contenido de frecuencias. *Obras y Proyectos* 28: 58-67. doi.org/10.4067/S0718-28132020000200058

Frahm, H. (1909). Device for damping vibrations of bodies. US Patent No. 989958A.

Miranda, J.C. (2005). On tuned mass dampers for reducing the seismic response of structures. *Earthquake Engineering & Structural Dynamics* 34(7):847-865. doi.org/10.1002/eqe.461

NCh2745 (2013). Análisis y diseño de edificios con aislación sísmica. Instituto Nacional de Normalización INN, Santiago, Chile

Ormondroyd, J. y Den Hartog, J.P. (1928). The theory of dynamic vibration absorber. *Transactions of the ASME* 50(7): 9-22. doi.org/10.1115/1.4058553.

Shum, K.M. (2009). Closed form optimal solution of a tuned liquid column damper for suppressing harmonic vibration of structures. *Engineering Structures* 31(1), 84-92. doi.org/10.1016/j.engstruct.2008.07.015

Sladek, J.R. and Klingner, R.E. (1983). Effect of tuned-mass dampers on seismic response. *Journal of Structural Engineering* 109(8): 2004-2009. doi.org/10.1061/(ASCE)0733-9445(1983)109:8(2004)

Soto-Brito, R. and Ruiz, S.E. (1999). Influence of ground motion intensity on the effectiveness of tuned mass dampers. *Earthquake Engineering & Structural Dynamics* 28(11): 1255-1271. doi.org/10.1002/(SICI)1096-9845(199911)28:11<1255::AID-EQE865>3.0.CO;2-C