

# Influencia del contenido de frecuencias de la excitación sísmica en la eficiencia de un amortiguado combinado sintonizado

Influence of seismic excitation frequency content on the efficiency of a combined tuned damping

Fecha de entrega: 2 de noviembre 2022

Fecha de aceptación: 2 de agosto 2023

Gilda Espinoza, Álvaro Suazo, Francisco Vergara y José Cantillana

Departamento de Ingeniería Civil y Ambiental, Universidad del Bío-Bío, Avenida Collao 1202, Casilla 5-C, Concepción, Chile, [gspinoz@ubiobio.cl](mailto:gspinoz@ubiobio.cl), [asuazo@ubiobio.cl](mailto:asuazo@ubiobio.cl), [fraverga@alumnos.ubiobio.cl](mailto:fraverga@alumnos.ubiobio.cl), [jcantill@alumnos.ubiobio.cl](mailto:jcantill@alumnos.ubiobio.cl)

*En esta investigación se analiza el comportamiento de una estructura lineal de un grado de libertad, que es controlada por un amortiguador combinado sintonizado (ACS). Éste se compone de dos dispositivos, un amortiguador de masa sintonizado (AMS) y un amortiguador de columna de líquido sintonizado (ACLS). El ACS es sometido a una excitación sísmica estocástica con el objetivo de analizar la influencia del contenido de frecuencias en la eficiencia del dispositivo. Como medida de eficiencia, se considera el porcentaje de reducción de la desviación estándar de desplazamiento del sistema principal. Los parámetros optimizados de cada dispositivo son la frecuencia y amortiguamiento en el caso del AMS, además de frecuencia y coeficiente de pérdida de carga para el ACLS. Se realiza un análisis de sensibilidad de los parámetros óptimos del ACS, con respecto a la razón de masa, periodo de la estructura principal y contenido de frecuencias de la excitación. Las principales conclusiones obtenidas, son que la eficiencia del ACS depende del contenido de frecuencias de la excitación. Además, esta aumenta a medida que la razón de masa aumenta, independiente del contenido de frecuencias de la excitación. Por otra parte, el ACS es menos eficiente para estructuras más flexibles.*

*Palabras claves: ACS, AMS, ACLS, optimización, análisis estocástico, protección sísmica*

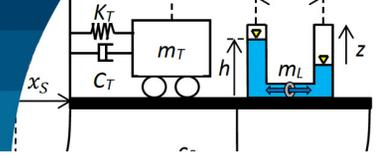
*In this investigation the behaviour of a linear structure of one degree of freedom is analysed, which is controlled by a tuned combined damper (ACS). This consists of two devices, a tuned mass damper (AMS) and a tuned liquid column damper (ACLS). The ACS is subjected to a stochastic seismic excitation in order to analyse the influence of the frequency content on the efficiency of the device. As a measure of efficiency, the percentage of reduction of the displacement standard deviation of the main system is considered. The optimized parameters of each device are the frequency and damping in the case of the AMS, as well as the frequency and pressure drop coefficient for the ACLS. A sensitivity analysis of the optimal parameters of the ACS is carried out, with respect to the mass ratio, period of the main structure and frequency content of the excitation. The main conclusions obtained are that the efficiency of the ACS DHW depends on the frequency content of the excitation. Furthermore, it increases as the mass ratio increases, independent of the frequency content of the excitation. On the other hand, ACS is less efficient for more flexible structures.*

*Keywords: CTD, TMD, TLCD, optimization, stochastic analysis, seismic protection.*

## Introducción Antecedentes

Durante los últimos treinta años se han desarrollado e implementado diversos dispositivos de control de vibraciones con el objetivo de mitigar alguna respuesta estructural, por ejemplo, el desplazamiento de la estructura.

Los dispositivos más comunes son los sistemas pasivos, que a diferencia de los sistemas activos e híbridos, no utilizan energía externa, poseen un diseño simple de instalar y realizar mantenimiento. Entre los dispositivos más usados se encuentran el Amortiguador de Masa Sintonizado (AMS) y el Amortiguador de Columna de Líquido Sintonizado (ACLS).



El AMS consiste en una masa secundaria individual, unida a la estructura principal, a través de una conexión en paralelo, compuesta por un amortiguador de tipo viscoso y un resorte elástico lineal. Este dispositivo se ubica generalmente en la azotea del edificio. El AMS fue desarrollado por Frahm (1909). Posteriormente en 1928 Ormondroyd y Den Hartog (1928) investigan el comportamiento del AMS bajo una excitación basal armónica. En 1956 Den Hartog determina los parámetros a utilizar para minimizar la respuesta máxima de un sistema no amortiguado. Estudios posteriores incluyen una visión estocástica del análisis, Crandall y Mark (1963) determinan el AMS óptimo de control de desplazamiento para una estructura bajo una excitación de ruido blanco.

Sgobba y Marano (2010) estudian el comportamiento de los parámetros óptimos de un AMS en el control de estructuras no lineales sometidas a una excitación sísmica estocástica. Para ello proponen tres funcionales de optimización, el primero consiste en minimizar el desplazamiento del sistema principal, el segundo minimiza la energía histerética disipada por la estructura y el tercer criterio es un funcional que considera una combinación entre el primer y segundo criterio.

El ACLS fue propuesto por Sakai *et al.* (1989) inicialmente como un dispositivo de control de estructuras sometidas a viento. Yalla y Kareem (2000) investigan el comportamiento del ACLS, en el control de estructuras ante dos tipos de cargas, viento y sismo. Realizan un análisis estocástico considerando excitaciones de ruido blanco y ruido blanco filtrado. Proponen una solución explícita para el coeficiente de pérdida de carga y razón de sintonía óptima para una estructura de un grado de libertad no amortiguado.

Shum (2009) presenta una solución cerrada para la determinación de los valores óptimos de los parámetros de diseño de un ACLS considerando una estructura sin amortiguamiento y realiza una comparación del control de la estructura con el ACLS, el método iterativo convencional.

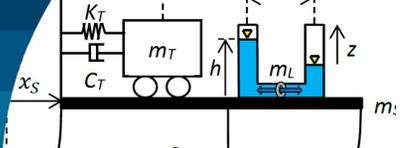
Chakraborty *et al.* (2012) estudian el comportamiento de los parámetros de diseño de un ACLS con respecto a la restricción del movimiento máximo del flujo en el dispositivo en el proceso de optimización.

Rozas *et al.* (2016) proponen un ACLS bidireccional, consistente en dos ACLS ubicados ortogonalmente. Concluyen que este dispositivo controla la respuesta ante excitaciones sísmicas, en las dos direcciones perpendiculares. Una ventaja del nuevo ACLS bidireccional, es que requiere de una menor masa de agua, respecto a dos ACLS equivalentes.

Espinoza *et al.* (2018), estudian la eficiencia de un ACLS en el control de estructuras con comportamiento no lineal sometidas a excitaciones sísmicas aleatorias. Encuentran que, para excitaciones de alto contenido de frecuencias, el ACLS se sintoniza con la frecuencia lineal equivalente de la estructura no controlada, mientras que para excitaciones de bajo contenido de frecuencias el ACLS se sintoniza con la frecuencia predominante de la excitación sísmica. Concluyen que el ACLS se desintoniza con respecto a la frecuencia de la estructura principal a medida que esta incurre más en el rango lineal.

Espinoza *et al.* (2021a) analizan el comportamiento de una estructura lineal controlada por un amortiguador de columna de líquido sintonizado (ACLS), la que es sometida a excitaciones sísmicas estocásticas de bajo contenido de frecuencia. Se estudia el comportamiento de los parámetros óptimos de diseño del ACLS, razón de frecuencias y coeficiente de pérdida de carga, cuando se ingresa incertidumbre en parámetros del sistema. Los parámetros considerados, fueron la razón de masa, la razón de longitud y el coeficiente de pérdida de carga. Se analiza el efecto de la inclusión de incertidumbre en los parámetros, en la reducción del desplazamiento de la estructura, y en la raíz cuadrática media RMS del desplazamiento de la estructura. Se encuentra que una incertidumbre en la razón de masa, y en la razón de longitud del ACLS, no produce variaciones en la eficiencia ni en el RMS de desplazamiento de la estructura. Sin embargo, una incertidumbre en el valor del periodo de la estructura produce grandes variaciones en la eficiencia y el RMS del desplazamiento de la estructura.

En la investigación de Espinoza *et al.* (2021b), se estudia el comportamiento de una estructura de un grado de libertad sometida a una excitación sísmica estocástica de alto contenido de frecuencias, la cual es controlada por un amortiguador de columna de líquido sintonizado (ACLS) óptimo, cuando se introduce incertidumbre en algunos parámetros óptimos del sistema ACLS, como son la razón



de frecuencias y el coeficiente de pérdida de carga. La incertidumbre es ingresada en la razón de frecuencias y de masa, la razón de longitud y el coeficiente de pérdida de carga. Se encuentra que la introducción de incertidumbre en el periodo de la estructura produce la mayor sensibilidad en los parámetros óptimos del ACS, la eficiencia y el RMS del desplazamiento de la estructura. Esto se produce principalmente en estructuras rígidas y con una razón de masa pequeña. Por otra parte, una incertidumbre en la razón de masa, y en la razón de longitud del ACS, no produce variaciones en la eficiencia ni en el RMS de desplazamiento de la estructura.

Wang *et al.* (2016) crea un nuevo dispositivo, que nace de la unión en paralelo de un AMS, con un ACS, al que denomina, “amortiguador sintonizado combinado” (ASC) (*Combined Tuned Damper, CTD*). El objetivo es controlar las vibraciones inducidas por el viento en edificios flexibles. Ellos obtienen las ecuaciones de movimiento de la estructura primaria como del ACS y se resuelven para anticipar la respuesta dinámica del sistema de estructura más ACS. Además, proponen un método de diseño óptimo del rendimiento del confort humano, en el que el coste del ciclo de vida del sistema amortiguador-estructura se considera como el índice cuantitativo del rendimiento.

Di Matteo *et al.* (2017), investigan un dispositivo de control novedoso que se obtiene uniendo el AMS y el ACS, llamado “Amortiguador Combinado Sintonizado”. No queda claro de quién es la idea original, al revisar el artículo de Wang *et al.* (2016). Se derivan las ecuaciones de movimiento con las que se analizan el desempeño de control de este dispositivo. Finalmente, los resultados teóricos se validan a través de una vasta campaña experimental realizada en el Laboratorio de Dinámica Experimental de la Universidad de Palermo, Italia.

Espinoza *et al.* (2020a) estudian el comportamiento de los parámetros óptimos y de la eficiencia del ACS en el control de una estructura sometida a excitación sísmica, cuando se incorpora incertidumbre en la razón de masa y la razón de longitud. La excitación sísmica es modelada como un proceso estocástico gaussiano de media cero, de tipo estacionario. Se considera una excitación sísmica de alto contenido de frecuencias. Se analiza la sensibilidad de los parámetros óptimos, razón de sintonía y coeficiente de pérdida de carga del ACS, y la razón de sintonía y

amortiguamiento del AMS; al incluir una incertidumbre en la razón de masa y en la razón de longitud. Se obtienen la eficiencia del ACS y la raíz media cuadrática RMS (*root mean square*) del desplazamiento del sistema principal. Los resultados muestran que el parámetro más sensible es el coeficiente de pérdida de carga, ante una incertidumbre en la razón de longitud. Se concluye que la eficiencia del ACS y RMS de desplazamiento de la estructura principal, es insensible a una incertidumbre menor a un 10%, tanto de la razón de masa como de la razón de longitud.

Espinoza *et al.* (2020b) analizan la eficiencia del ACS en la reducción del desplazamiento lateral de una estructura sometida a excitaciones sísmicas estocásticas de bajo contenido de frecuencias. El objetivo es analizar cómo cambia su eficiencia, cuando se introduce incertidumbre en sus parámetros de diseño, considerando una incertidumbre de  $\pm 5$  y  $\pm 10\%$ . Los parámetros a los que se les introdujo incertidumbre, fueron la razón de longitud del ACS y la razón de masa. Los resultados muestran que la eficiencia del ACS es máxima, cuando el periodo de la estructura coincide con el periodo predominante de la excitación sísmica. Por otra parte, existen leves variaciones en la eficiencia del ACS, cuando se introduce una incertidumbre de hasta un 10% en la razón de masa o razón de longitud del ACS.

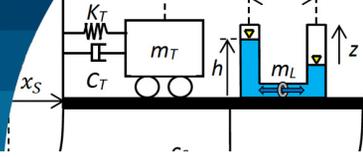
Kamel y Basily (2021) encuentran los valores óptimos de los parámetros del sistema para reducir la respuesta en desplazamiento de una estructura principal, a través de un dispositivo que combina un amortiguador de masa sintonizado y un péndulo combinado de tres grados de libertad (3-DOF CPTMD). Utilizaron tres técnicas de búsqueda de optimización y se determinó el mejor método óptimo. Encontraron que el CPTMD 3-DOF propuesto es eficiente bajo diversas excitaciones sísmicas.

Esta investigación tiene por objetivo analizar la influencia del contenido de frecuencia de una excitación sísmica en la eficiencia de un ACS óptimo.

## Modelo estructural y ecuaciones de movimiento

### Modelo estructural

En la Figura 1 se muestra el modelo de estudio  $M_1$  de esta investigación. Este está compuesto por una estructura de un grado de libertad (gdl) traslacional,  $x_s(t)$ . A dicho gdl



se le ha adicionado un ACS, que está compuesto por dos dispositivos en paralelo, un AMS y un ACLS. El AMS posee un gdl lateral traslacional  $x_T(t)$  y el ACLS un gdl vertical  $z(t)$ . Por tanto,  $\mathbf{M}_1$  posee tres grados de libertad. De acuerdo con lo anterior, el vector de gdl es:

$$\mathbf{X} = \{x_s(t) \quad x_T(t) \quad z(t)\}^T \quad (1)$$

Las propiedades de la estructura principal y del CTD son la masa  $M_S$ , el coeficiente de amortiguamiento  $C_S$  y el coeficiente de rigidez elástico  $K_S$ . Por otra parte, las propiedades del AMS son la masa  $M_T$ , el coeficiente de amortiguamiento  $C_T$  y el coeficiente de rigidez elástico,  $K_T$ .

Finalmente, las propiedades del ACLS son  $M_L$  su masa líquida,  $B_h$  y  $h$ , dimensiones horizontal y vertical, respectivamente. La aceleración del suelo es expresada como  $\ddot{u}_g$ . Se considera que bajo la estructura se encuentra un estrato de suelo, cuyas características se modelan, a través de la utilización de un doble filtro de Clough y Penzien (1974), el primero simula un estrato de suelo y el segundo corrige las frecuencias altas. Se asume que en la base hay roca, en la que ingresa una señal de ruido blanco, y llega a través del estrato de suelo hasta la base de la estructura.

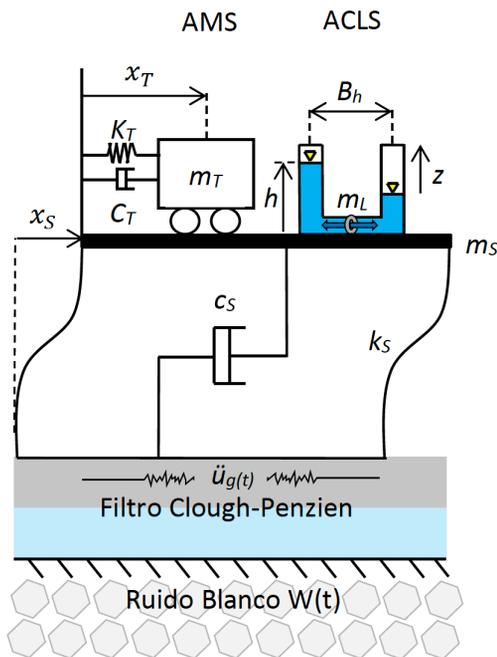


Figura 1: Modelo de análisis estructural lineal con ACS adherido

### Linealización estadística equivalente de la ecuación del ACLS

Para obtener las ecuaciones se entrega la formulación de la ecuación del movimiento no lineal de 1gdl controlado por un ACLS, que es solicitado por una aceleración basal vertical (Sakai *et al.*, 1989), que se muestra en la ecuación (2).

$$\rho A L_e \ddot{z} + \frac{1}{2} \rho A \xi |\dot{z}| \dot{z} + 2 \rho A g z = -\rho A B_h (\ddot{x}_s + \ddot{u}_g) \quad (2)$$

Donde  $A$  es el área de la sección transversal del tubo,  $L_e = 2h + B_h$  es la longitud efectiva de la columna líquida,  $\rho$  es la densidad del líquido contenido por el ACLS, y  $g$  es la aceleración de gravedad. El coeficiente de pérdida de carga es  $\xi$ , y depende de la abertura del orificio que se encuentra en la sección horizontal del tubo del ACLS. Debido a que se realizó un análisis estocástico se debió linealizar estadísticamente la ecuación (2). Para ello se asumió un proceso Gaussiano de media cero, obteniéndose la ecuación (3):

$$\rho A L_e \ddot{z} + 2 \rho A c_p \dot{z} + 2 \rho g A z = -\rho A B_h (\ddot{x}_s + \ddot{u}_g) \quad (3)$$

donde  $c_p$  es el coeficiente de amortiguación lineal equivalente dado por (Chakraborty *et al.*, 2012):

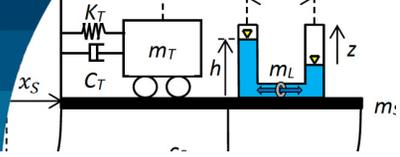
$$c_p = \frac{\xi \sigma_{\dot{z}}}{\sqrt{2\pi}} \quad (4)$$

donde  $\sigma_{\dot{z}}$  es la desviación estándar de la velocidad del líquido. Para trabajar en forma adimensional, (3) se normaliza con respecto a la masa del líquido, obteniéndose la ecuación (5).

$$\ddot{z} + \frac{2c_p}{L_e} \dot{z} + \frac{2g}{L_e} z + p \ddot{x}_s = -p \ddot{u}_{gc} \quad (5)$$

Donde  $p = \frac{B_h}{L_e}$  se define como la razón de longitud. (Chakraborty *et al.*, 2012).

Por otra parte,  $\omega_l = \sqrt{\frac{2g}{L_e}}$  es la frecuencia del líquido y  $\gamma_l = \frac{\omega_l}{\omega_s}$  la razón de sintonía con respecto a la frecuencia de la estructura principal. Además,  $\omega_s$  es la frecuencia desacoplada de la estructura principal.



## Ecuaciones de movimiento del sistema principal con ACS

### Ecuaciones del movimiento Modelo $M_1$

La ecuación matricial diferencial de segundo orden con respecto al tiempo, se muestra en (6)-(8):

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{X}} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{X}} + \mathbf{K}\mathbf{X} = \mathbf{B}_u\ddot{u}_g \quad (6)$$

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} 1 + \mu_T + \mu_L & \mu_T & \mu_L p \\ \mu_T & \mu_T & 0 \\ \mu_L p & 0 & \mu_L \end{bmatrix} \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 2\xi_s \omega_s & 0 & 0 \\ 0 & 2\xi_T \omega_T \mu_T & 0 \\ 0 & 0 & 2 \frac{C_F \mu_L}{L_e} \end{bmatrix} \quad (7a, 7b)$$

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} \omega_s^2 & 0 & 0 \\ 0 & \mu_T \omega_T^2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2g\mu_L}{L_e} \end{bmatrix} \quad \mathbf{B}_u = \begin{bmatrix} -(1 + \mu_T + \mu_L) \\ -\mu_T \\ -\mu_L p \end{bmatrix} \quad (8a, 8b)$$

donde  $\mathbf{M}$ ,  $\mathbf{C}$ ,  $\mathbf{K}$  y  $\mathbf{B}_u$  son las matrices de masa, amortiguamiento, rigidez y el vector de colocación del input, respectivamente. Por otra parte,  $\omega_s$  es la frecuencia del sistema principal,  $\xi_s$  es la razón de amortiguamiento,  $\omega_T$  es la frecuencia del AMS,  $\xi_T$  es la razón de amortiguamiento del AMS,  $\mu_T$  es la razón de masa del AMS (ecuación (9a)) y  $\mu_L$  es la razón de líquido del ACLS (Ecuación 9b).

$$\mu_T = \frac{m_T}{m_s} \quad ; \quad \mu_L = \frac{m_L}{m_s} \quad (9a, 9b)$$

## Ecuaciones en espacio de estado del sistema principal con ACS

La ecuación (10) muestra la formulación en espacio de estado, que consiste en una ecuación diferencial matricial con respecto al tiempo, de primer orden:

$$\dot{\mathbf{X}}_1 = \mathbf{A}\mathbf{X}_1 + \tilde{\mathbf{B}}_u\ddot{u}_g \quad (10)$$

en el que el vector de estado  $\mathbf{X}_1$  como se muestra en la ecuación (11) es:

$$\mathbf{X}_1 = \{\mathbf{X} \quad \dot{\mathbf{X}}\} \quad (11)$$

$$\mathbf{X}_1 = \{x_s(t) \quad x_T(t) \quad z(t) \quad \dot{x}_s(t) \quad \dot{x}_T(t) \quad \dot{z}(t)\}^T \quad (12)$$

Las matrices  $\mathbf{A}$  y  $\tilde{\mathbf{B}}_u$  son las que se muestran en la ecuación (13):

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0_{3 \times 3} & I_{3 \times 3} \\ M^{-1}K & M^{-1}C \end{bmatrix} \quad \tilde{\mathbf{B}}_u = \begin{bmatrix} 0_{3 \times 1} \\ -M^{-1}\mathbf{B}_u \end{bmatrix} \quad (13a, 13b)$$

donde la matriz de estado se muestra en (13a) y el vector de colocación de excitación sísmica se muestra en (13b).

## Tipo de excitación sísmica

Se realiza un análisis estocástico del modelo  $M_1$  sometido a una excitación sísmica de alto contenido de frecuencias (BBP) y bajo contenido de frecuencias (NBP). Para el primer caso, el input sísmico se deriva de un sismo artificial generado del espectro de la norma NCh 2745 (2013) para suelo tipo B, con el que se obtiene la Densidad de Potencia Espectral a través de un ajuste de mínimos cuadrados, es decir, un filtro de Clough-Penzien (1975), ecuación (14).

$$S_g(\omega) = S_o \frac{\omega_g^4 + 4\xi_g^2 \omega_g^2 \omega^2}{(\omega_g^2 - \omega^2) + 4\xi_g^2 \omega_g^2 \omega^2} \cdot \frac{\omega^4}{(\omega_f^2 - \omega^2) + 4\xi_f^2 \omega_f^2 \omega^2} \quad (14)$$

Donde  $S_o$  es la potencia del ruido blanco,  $\omega_g$ ,  $\xi_g$  son la frecuencia y el amortiguamiento del estrato de suelo. Por otra parte,  $\omega_f$ ,  $\xi_f$  son la frecuencia y amortiguamiento del filtro. Estos parámetros se ajustan por mínimos cuadrados. Los parámetros del filtro se muestran en la Tabla 1, en donde BBP (*Broad Band Process*) es el proceso de ancho de banda amplio y NBP (*Narrow Band Process*) es el proceso de ancho de banda angosto.

Tabla 1.: Parámetros del filtro Clough y Penzien (1975)

| Tipo de entrada | Parámetros |                    |                    |         |         |
|-----------------|------------|--------------------|--------------------|---------|---------|
|                 | $S_o$      | $\omega_g$ , rad/s | $\omega_f$ , rad/s | $\xi_g$ | $\xi_f$ |
| BBP             | 207.23     | 16.57              | 3.02               | 0.491   | 0.48    |
| NBP             | 207.23     | 3.14               | 8.48               | 0.100   | 0.90    |

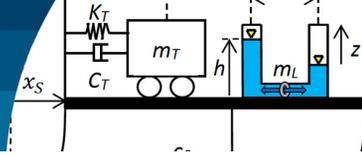
## Formulación en espacio de estado del filtro

Las ecuaciones (15) y (16a)-(16b) representan el vector y ecuación de estado del filtro, respectivamente (Saitua *et al.*, 2018):

$$\mathbf{X}_f = \{x_g \quad \dot{x}_g \quad x_f \quad \dot{x}_f\}^T \quad (15)$$

$$\dot{\mathbf{X}}_f = \mathbf{A}_f \mathbf{X}_f + \mathbf{B}_f W(t) \quad ; \quad \ddot{u}_g = \mathbf{C}_f \mathbf{X}_f \quad (16a, 16b)$$

donde  $W(t)$  es la intensidad de ruido blanco. Los parámetros  $x_g$  y  $x_f$  representan la posición del suelo y del



filtro respectivamente.

$$\sigma_{\ddot{u}_g}^2 = \frac{PGA}{3} \quad (17)$$

En (17) se expresa  $\sigma_{\ddot{u}_g}^2$ , que es la varianza de la aceleración del suelo. La aceleración máxima del suelo se expresa como PGA (*Peak Ground Acceleration*), en este caso se consideró un  $PGA = 0.3g$ , en el que  $g$  es la aceleración de gravedad.

La matriz de estado del filtro  $\mathbf{A}_f$  se muestra en (18), y (19a) muestra  $\mathbf{C}_f$  que se define como el vector de output del filtro, y  $\mathbf{B}_f$  en (19b) es el vector de colocación del ruido blanco del filtro.

$$\mathbf{A}_f = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\omega_g^2 & -2\xi_g\omega_g & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \omega_f^2 & 2\xi_f\omega_f & -\omega_f^2 & -2\xi_f\omega_f \end{bmatrix} \quad (18)$$

$$\mathbf{C}_f = [\omega_g^2 \quad 2\xi_g\omega_g \quad -\omega_f \quad -2\xi_f\omega_f] \quad \mathbf{B}_f = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (19a, 19b)$$

## Formulación en espacio de estado ampliado

En la ecuación (20) y (21) se muestran respectivamente, el vector y ecuación de estado ampliado, de la formulación en espacio estado de la estructura principal más el ACS, incluido el filtro.

$$\mathbf{X}_2 = \{ \mathbf{X}_1^T \quad \mathbf{X}_f^T \}^T \quad (20)$$

$$\dot{\mathbf{X}}_2 = \mathbf{A}_2 \mathbf{X}_2 + \mathbf{B}_2 W(t) \quad (21)$$

En donde su matriz de estado  $\mathbf{A}_2$  y vector de colocación  $\mathbf{B}_2$  de la excitación sísmica, se muestran en la ecuación (22a) y (22b), respectivamente. Ellos contienen la estructura - ACS - filtro.

$$\mathbf{A}_2 = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \tilde{\mathbf{B}}_u \mathbf{C}_f \\ 0 & \mathbf{A}_f \end{bmatrix} \quad \mathbf{B}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ \mathbf{B}_f \end{bmatrix} \quad (22a, 22b)$$

Entonces la ecuación de estado extendida estructura - ACS - filtro, se muestra en ecuación (23).

$$\begin{Bmatrix} \dot{\mathbf{X}}_2 \\ \dot{\mathbf{X}}_f \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B}_u \mathbf{C}_f \\ 0 & \mathbf{A}_f \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{X}_2 \\ \mathbf{X}_f \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0 \\ \mathbf{B}_f \end{Bmatrix} W(t) \quad (23)$$

## Determinación de la matriz de covarianza

La matriz de covarianza  $\mathbf{R}$  del sistema estructural con el ACS y el filtro, se obtiene resolviendo la ecuación de Lyapunov expresada en la Ecuación ecuación (24).

$$\mathbf{A}_2^T \cdot \mathbf{R} + \mathbf{R} \cdot \mathbf{A}_2 + \mathbf{B}_2^T \cdot \mathbf{W} \cdot \mathbf{B}_2 = 0 \quad (24)$$

En el que  $\mathbf{W}$  es la intensidad de la señal del Ruido Blanco.

## Optimización Función objetivo

El problema de optimización a resolver es una minimización de una función objetivo, a través de la determinación de los parámetros óptimos, razón de sintonía ( $\gamma_{opt}$ ) y coeficiente de pérdida de carga ( $\xi_{opt}$ ).

La función objetivo a minimizar es:

$$\text{Minimizar: } J(\gamma_T, \gamma_L, \xi_T, \xi_L) = \text{Min}(\sigma_{x_s}) \quad (25a)$$

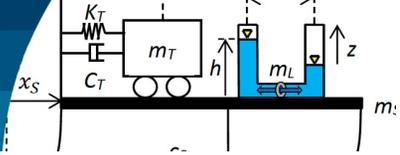
Las restricciones de optimización de los parámetros son:

$$\begin{aligned} 0.5 < \gamma_L < 2 \\ 0 < \xi_L < 30 \\ 0.5 < \gamma_T < 2 \\ 0 < \xi_T < 1 \end{aligned} \quad (25b)$$

Sujeto a la condición de borde física:

$$h - c\sigma_z \geq 0 \quad (25c)$$

Se adoptó un valor 2.0 para la constante  $c$ . La razón es compatibilizar esta investigación con otras realizadas por los autores (Espinoza *et al.*, 2018). Donde  $\sigma_z$  corresponde a la desviación estándar del desplazamiento de la superficie del líquido del ACLS y  $h$  es la altura en condición estática. La restricción corresponde al límite máximo de desplazamiento en altura  $h$  dado por la variable  $z$  que puede alcanzar el líquido dentro del ACLS;  $\gamma_T$  y  $\gamma_L$  son las razones de sintonía entre las frecuencias de los amortiguadores,  $\omega_T$  y  $\omega_L$ , y la frecuencia de la estructura principal  $\omega_s$ ; esta razón queda definida de la siguiente manera:



$$\gamma_T = \frac{\omega_T}{\omega_S}; \gamma_L = \frac{\omega_L}{\omega_S} \quad (26)$$

Para evitar el derrame del líquido, el movimiento del fluido de columna del amortiguador no debe sobrepasar el nivel de altura de la columna del ACLS. Lo que se cumple a través de la ecuación (26).

## Eficiencia Eficiencia del ACS

La eficiencia del ACS se calculó a través de la ecuación (27), donde  $RD$  se expresa en forma porcentual, es decir, a medida que aumenta el valor es mayor en eficiencia o reducción.

$$RD = \left( 1 - \frac{\sigma_{x_c}}{\sigma_{x_s}} \right) \cdot 100\% \quad (27)$$

Por otra parte,  $\sigma_{x_c}$  corresponde a la desviación estándar de desplazamiento del sistema principal controlado por un ACS óptimo y  $\sigma_{x_s}$  es la desviación estándar de desplazamiento del sistema principal sin ACS.

## Resultados obtenidos

Se analiza la sensibilidad de los parámetros óptimos correspondientes al ACLS ( $\gamma_p, \xi_p$ ) y otra con los de AMS ( $\gamma_p, \xi_p$ ). Se estudia su comportamiento con respecto a dos parámetros, el periodo fundamental de la estructura  $T_s$ , que define la flexibilidad de la estructura y la razón de masa  $\mu$ , propiedad de los dispositivos de gran importancia en sus comportamientos. Como criterio se asignó una cantidad de masa distinta en ambos dispositivos, la que se expresa a través de un parámetro  $\alpha_1$  que mide razón de masa del ACLS,  $\mu_L$ , con respecto a la razón de masa total de ACS. Se realiza primero el análisis de sensibilidad del ACS con respecto a  $\mu$  y posteriormente con respecto a  $T_s$ . En cada caso se analiza primero el dispositivo ACLS y posteriormente el AMS. Para el análisis del contenido de frecuencias, en cada caso se analiza primero ante un input de BBP seguido de una excitación de NBP.

## Análisis de sensibilidad Efecto de la razón de masa $\mu$

Como se mencionó anteriormente, se realiza un análisis del comportamiento de los parámetros óptimos del AMS  $\gamma_T$  y  $\xi_T$  con respecto a la razón de masa total  $\mu$ . De acuerdo con lo expresado con anterioridad, este parámetro corresponde a la porción de masa del ACLS con respecto a la masa total del ACS. A este parámetro se le asignó tres valores,  $\mu = 0.25, 0.5, \text{ y } 0.75$ . En el primer caso, predomina la masa del AMS, el segundo valor asume masas iguales y en el tercer valor se asume mayor masa para el ACLS. La Figura 2 muestra 6 gráficos correspondientes a los parámetros óptimos del AMS con respecto a la razón de masa total del ACS  $\mu$ . En la fila superior se encuentra la razón de sintonía óptima  $\gamma_T$  y en la inferior el amortiguamiento óptimo  $\xi_T$ .

Se grafican los parámetros óptimos del AMS, donde se analiza una estructura de 2.0, 2.5 y 3.0 s de periodo. Estos gráficos se obtuvieron para un BBP. Se observa que cuando la razón de masa del AMS es mayor, este tiende a sintonizarse con la frecuencia de la estructura, independiente de la razón de masa total. Y a medida que posee un menor porcentaje de la masa total del ACS, disminuye linealmente a medida que aumenta la razón de masa total, siendo más notorio en estructuras más flexibles. En cuanto a la razón de amortiguamiento, aumenta a medida que la razón de masa aumenta. Además, es insensible al periodo de la estructura.

La Figura 3 es análoga a la Figura 2, pero considera un NBP. Se observa que el comportamiento de la razón de amortiguamiento óptimo del AMS es similar al caso de ancho de banda amplia. Sin embargo, la razón de aumento con respecto a la razón de masa es mayor para periodos mayores. Por otra parte, en el caso del periodo  $T_s = 2.5$  s cuando la razón de masa del AMS es mayor a la del ACLS, la razón de sintonía del AMS se desintoniza, aumentando con respecto a la razón de masa del ACS. Es decir, la frecuencia óptima del AMS crece, con respecto a la frecuencia de la estructura principal. Para estructuras más flexibles, las razones de sintonía decrecen con respecto a la razón de masa del ACS, siguiendo un orden inverso con respecto a las razones de masa, al caso del NBP.

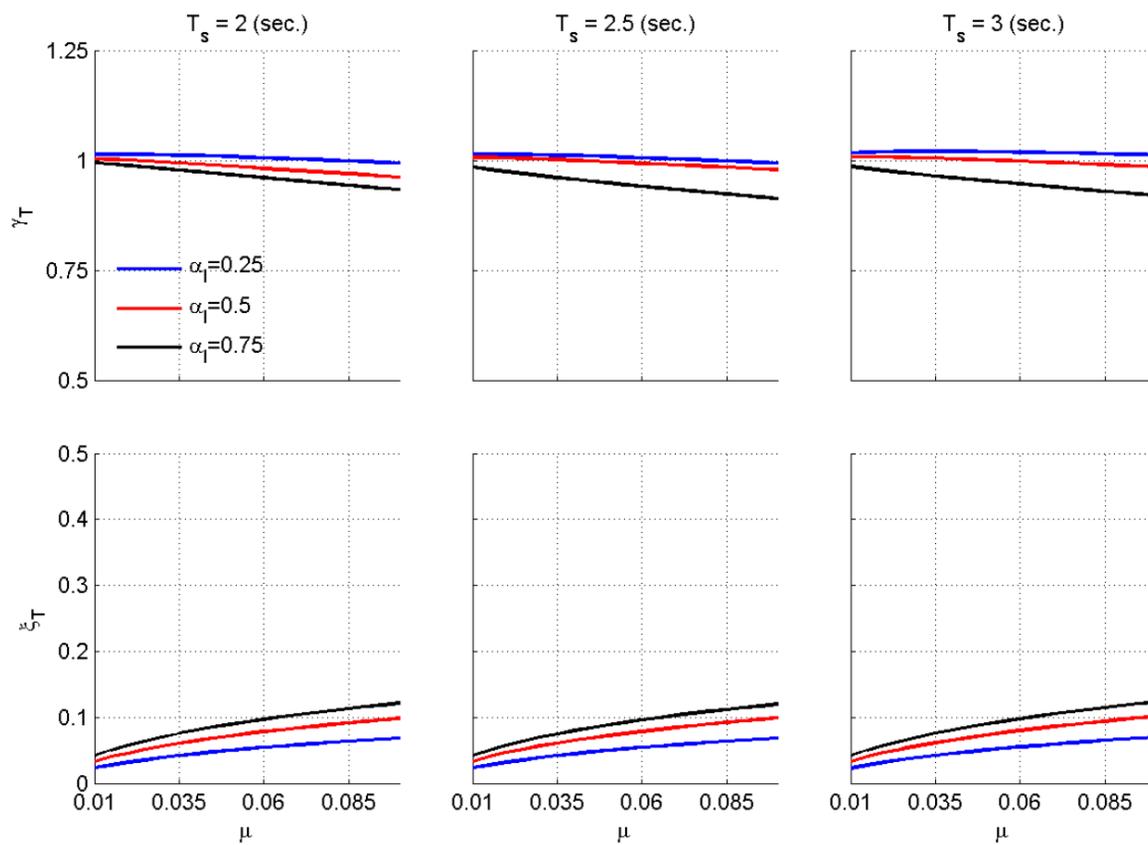
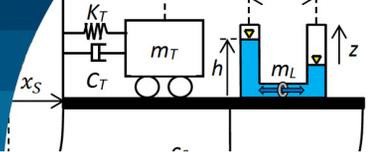


Figura 2: Razón de sintonía  $\gamma_T$  y amortiguamiento óptimo  $\xi_T$  en función de la razón de masa  $\mu$  para distintos valores de  $\alpha_1$ .

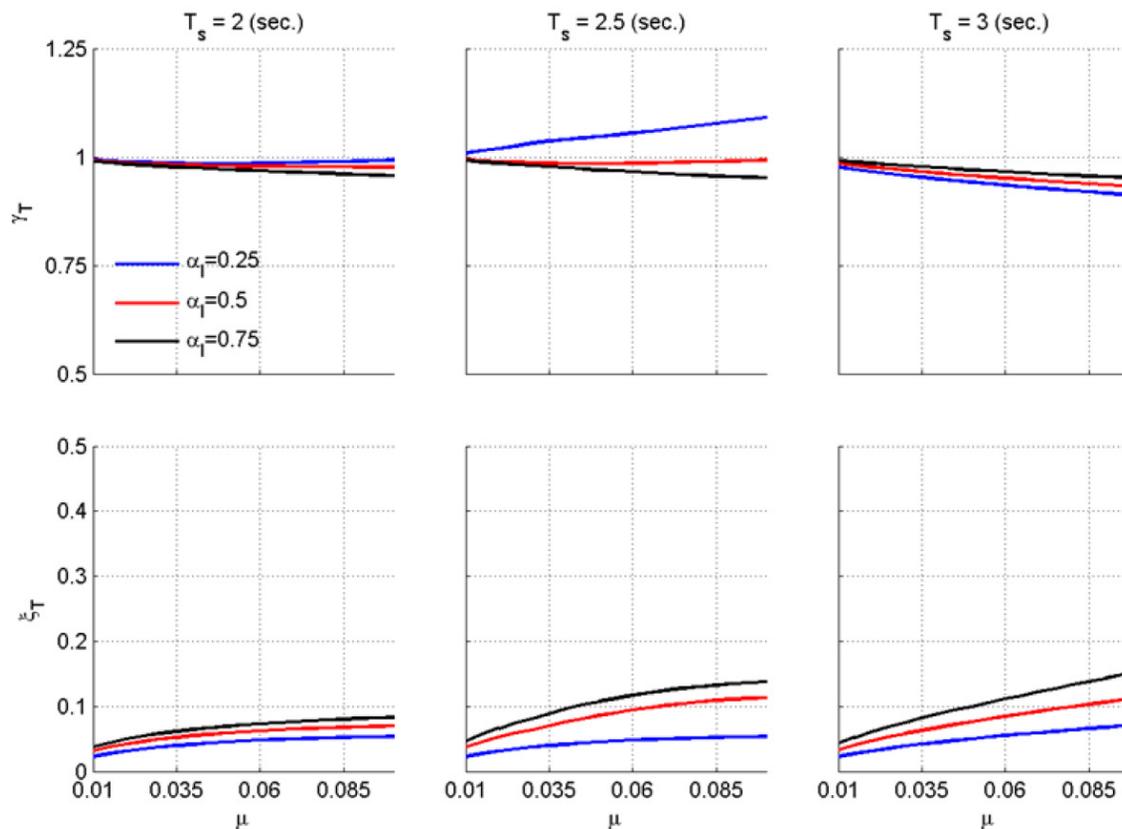
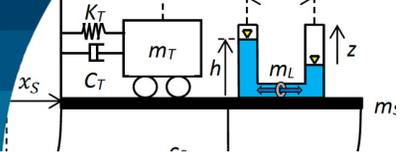


Figura 3: Razón de sintonía  $\gamma_T$  y amortiguamiento óptimo  $\xi_T$  en función de la razón de masa  $\mu$  con amortiguamiento del sistema  $\xi_s = 0.02$  y distintos valores de  $\alpha_1$  para un proceso aleatorio de AB angosto.



La Figura 4 es análoga a la Figura 2, sin embargo, corresponde a los parámetros óptimos del ACLS, es decir, razón de frecuencias óptima del ACLS  $\gamma_L$  y el coeficiente de pérdida de carga  $\xi_L$ . Al igual que en la Figura 2, el input corresponde a un BBP.

En la Figura 4 se observa que para periodos bajos la frecuencia óptima del ACLS tiene un valor menor que la de la frecuencia traslacional desacoplada de la estructura principal. Se observa que a medida que aumenta la razón de masa, la razón de frecuencias óptima disminuye. Por otra parte, mientras mayor es el porcentaje de masa del ACLS con respecto a la razón de masa total, la razón de decrecimiento es mayor. En el caso de estructuras más flexibles, cuando el porcentaje de masa del ACLS es mayor a la del AMS, la frecuencia óptima del ACLS es mayor a la de la estructura principal y aumenta con respecto a la razón de masa total.

Por otra parte, el coeficiente de pérdida de carga a medida que aumenta la razón de masa total aumenta y es mayor para razones de masa menores del ACLS. Se observa

que mientras es menor el porcentaje de masa de líquido, la razón de crecimiento es mayor. Además, mientras más flexible es la estructura, es mayor el valor del coeficiente de pérdida de carga. La Figura 5 entrega resultados análogos a la Figura 4, pero resultantes de una excitación de ancho de banda angosta.

En la Figura 5, el comportamiento difiere bastante del caso de BBP, principalmente para la razón de frecuencias óptimas para periodo alto. En tal caso, aumenta con respecto a la razón de masa, siendo mayor a medida que el porcentaje de masa de líquido es mayor. En el caso del coeficiente de pérdida de carga, el comportamiento para estructuras medias a bajas es totalmente distinto al caso de BBP. En este caso, a medida que aumenta la razón de masa el coeficiente de pérdida de carga disminuye y es menor a medida que aumenta el porcentaje de masa del líquido. Para el periodo de 2.5 s, a medida que disminuye el porcentaje de masa de líquido, el comportamiento del coeficiente de pérdida de carga cambia de un decrecimiento a un aumento en valor de este.

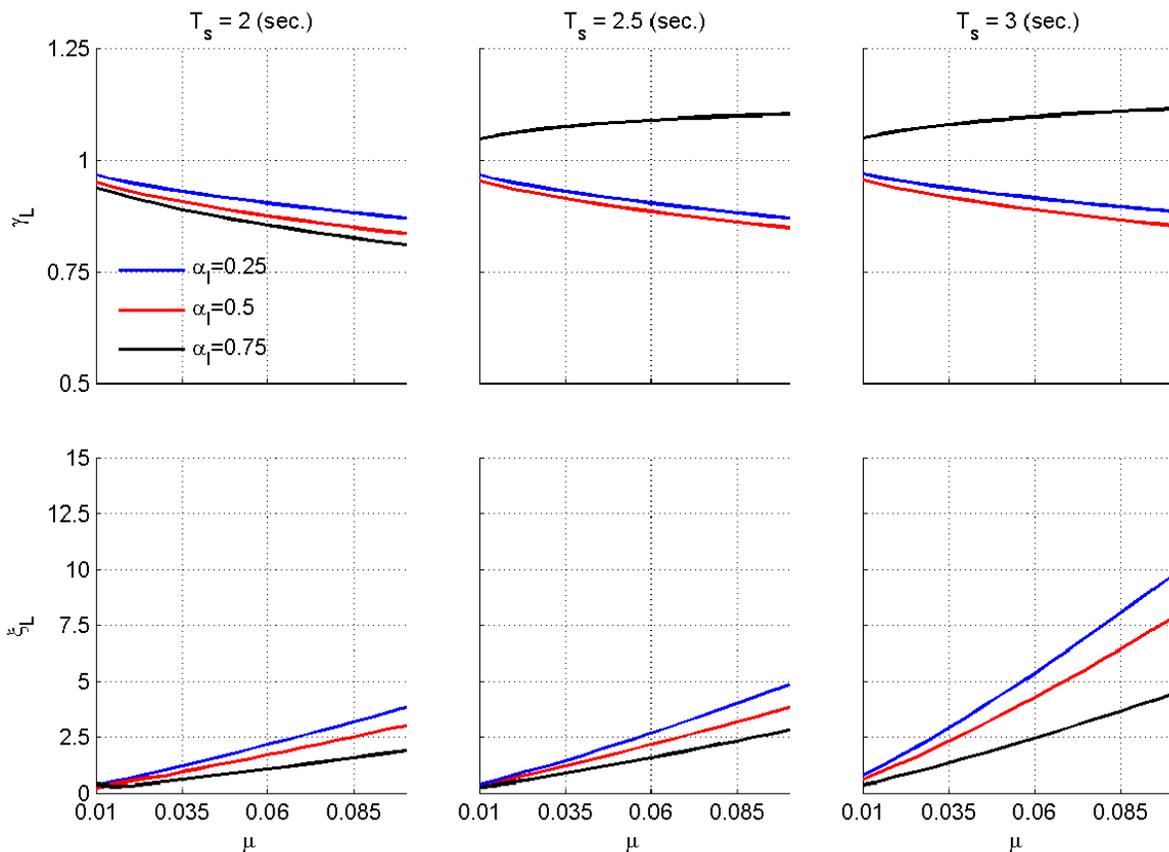


Figura 4: Razón de sintonía  $\gamma_L$  y coeficiente de pérdida de carga óptimo  $\xi_L$  en función de la razón de masa  $\mu$  con amortiguamiento del sistema  $\xi_s = 0.02$  y distintos valores de  $\alpha_1$  para un proceso aleatorio de AB amplio.

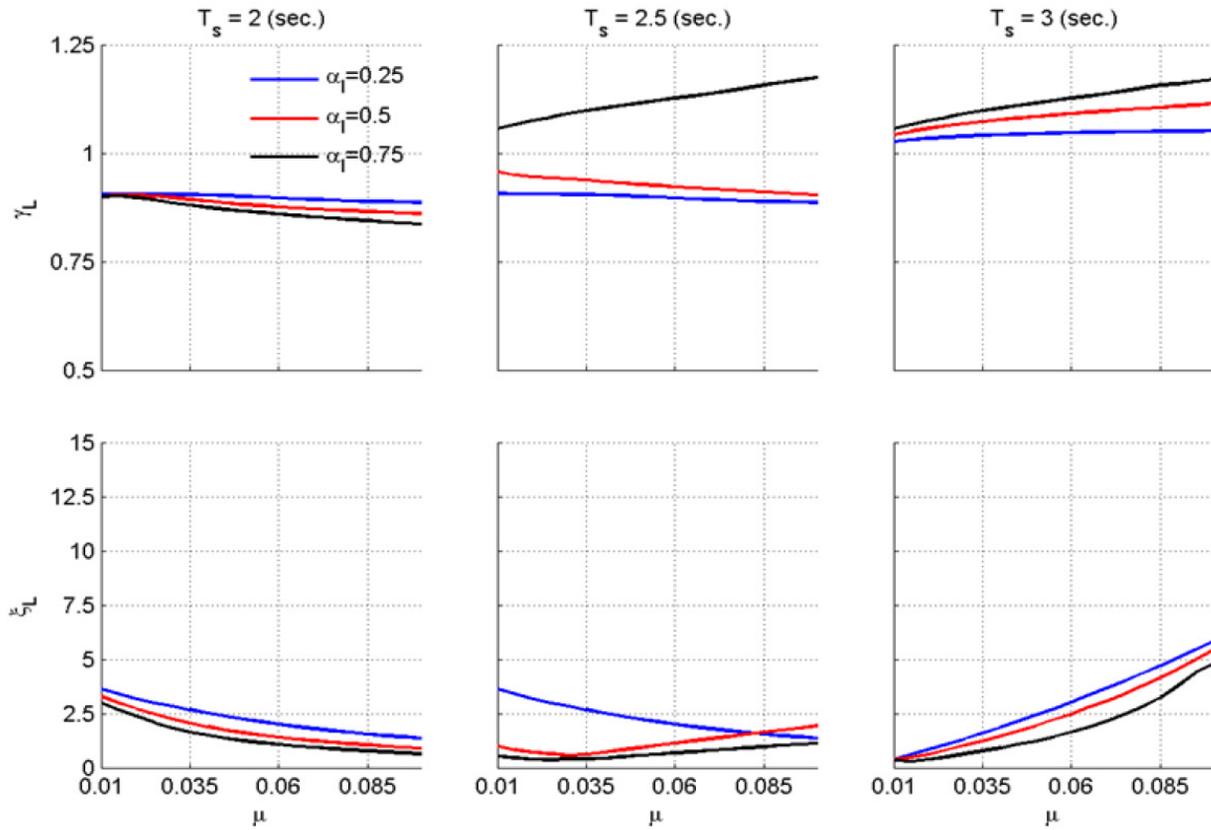
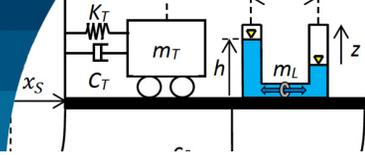


Figura 5: Razón de sintonía  $\gamma_L$  y coeficiente de pérdida de carga óptimo  $\xi_L$  en función de la razón de masa  $\mu$  con amortiguamiento del sistema  $\xi_s = 0.02$  y distintos valores de  $\alpha_1$  para un proceso aleatorio de AB angosto.

### Efecto del periodo de la estructura

A continuación se realiza un análisis de sensibilidad de los parámetros óptimos del ACS, con respecto al periodo de la estructura principal. Al igual que en el apartado anterior se muestran los resultados, primero para los parámetros óptimos del AMS y después para los del ACLS.

De la misma manera que en el análisis anterior, se analiza primero el modelo  $M_1$ , sometido a un proceso de ancho de banda amplio y posteriormente, a un proceso de ancho de banda angosto. En la Figura 6, se muestran 6 gráficos, en donde la disposición de los parámetros óptimos es la misma de la Figura 2. Sin embargo, se grafica en función del periodo de la estructura principal y a un valor de la razón de masa total  $\mu = 0.04, 0.06$  y  $0.08$ . Cada curva corresponde a una razón de longitud,  $p = 0.5, 0.6$  y  $0.7$ . En este caso el input sísmico es un BBP. Es importante notar que en este análisis el porcentaje de la razón de masa total, para el ACLS y el AMS es de un 50%.

En la Figura 6 se observa que la razón de frecuencias

óptimas es prácticamente insensible al periodo de la estructura, aumentando levemente su magnitud con respecto al periodo. Por otra parte, es dependiente de la razón de longitud, sólo para razones de masa bajas, siendo menor, a medida que las razones de longitud son menores. En cuanto a la razón de amortiguamiento, se observa una insensibilidad al periodo y a la razón de longitud, aumentando levemente su valor a medida que aumenta la razón de masa.

La Figura 7 es análoga a la Figura 6, pero considera como input un NBP. De ella se observa que tiene un comportamiento levemente distinto en el comportamiento de la razón de frecuencia óptima de la Figura 6. En este caso, este parámetro óptimo es insensible al periodo de la estructura principal, y para periodos medios a altos se sintoniza con la estructura principal. Además, para razones de masa menores, es insensible para razones de longitud más bajas. Por otra parte, se observa un comportamiento prácticamente igual en la razón de amortiguamiento al caso del BBP.

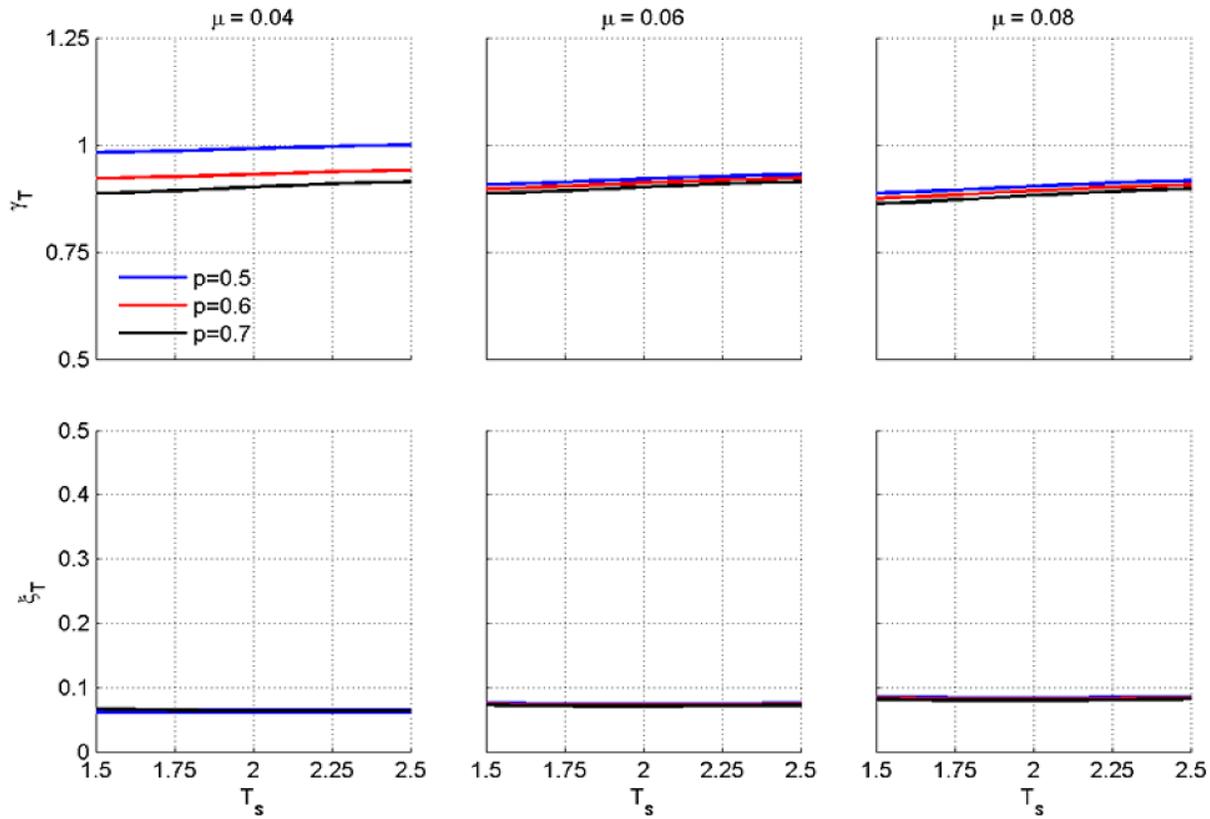
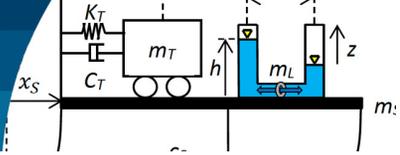


Figura 6: Razón de sintonía  $\gamma_T$  y amortiguamiento óptimo  $\xi_T$  en función del periodo de la estructura primaria  $T_s$  con amortiguamiento del sistema  $\xi_s = 0.02$  y distintos valores del parametro  $\rho$  para un proceso aleatorio de AB amplio.

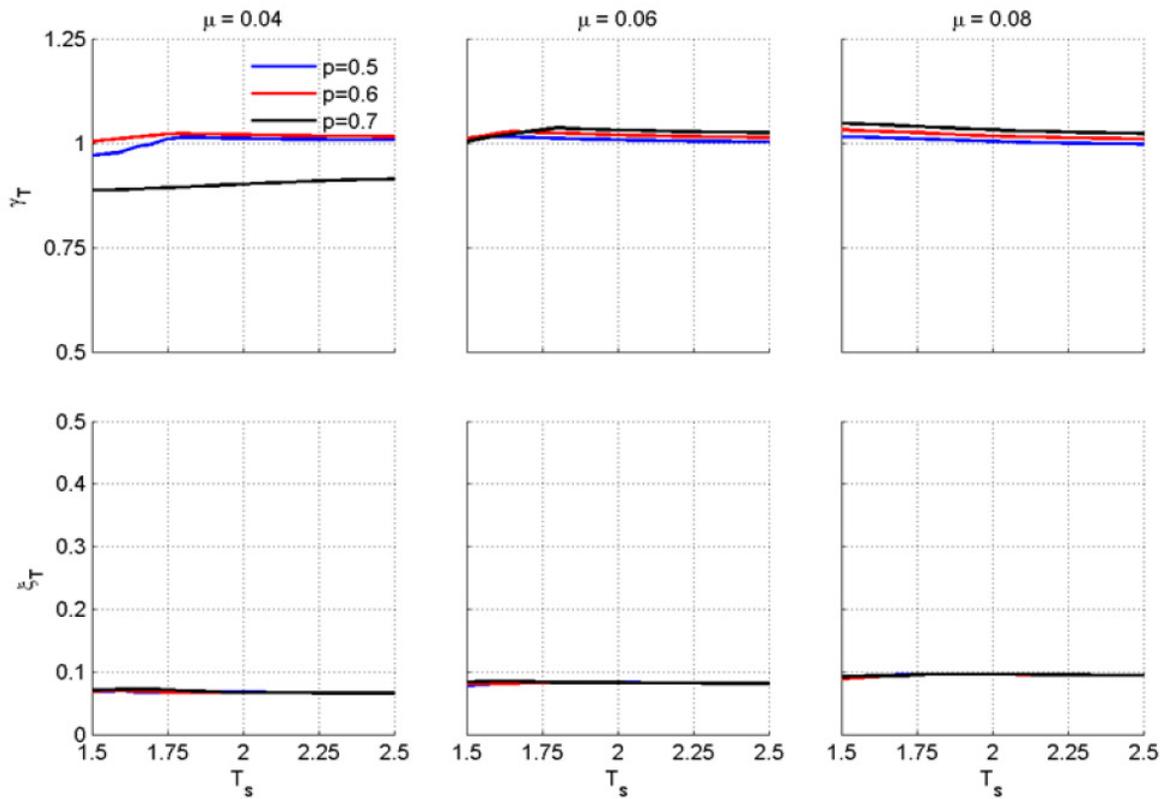


Figura 7: Razón de sintonía  $\gamma_T$  y amortiguamiento óptimo  $\xi_T$  en función del periodo de la estructura primaria  $T_s$  con amortiguamiento del sistema  $\xi_s = 0.02$  y distintos valores del parametro  $\rho$  para un proceso aleatorio de AB angosto.

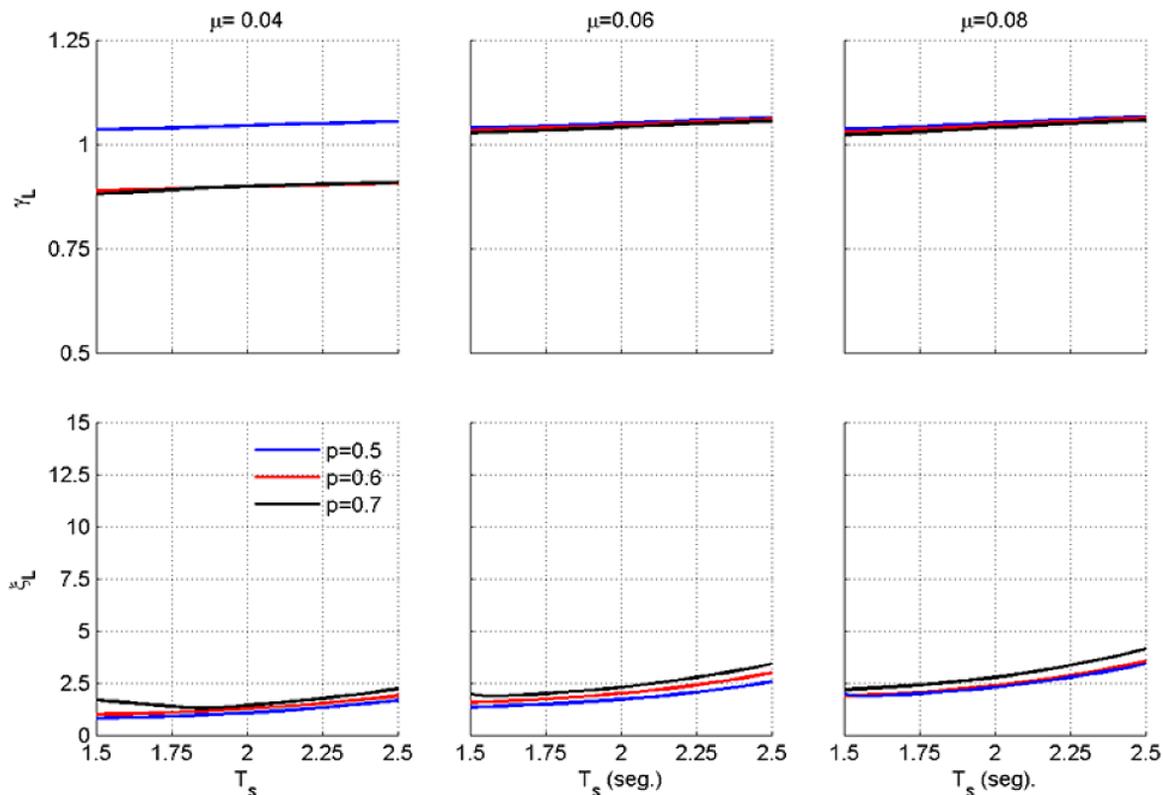
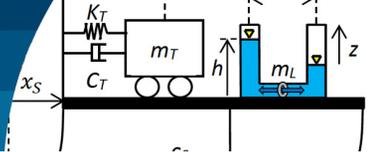


Figura 8: Razón de sintonía  $\gamma_L$  y coeficiente de pérdida de carga óptimos  $\xi_L$  en función del periodo de la estructura primaria  $T_s$  con amortiguamiento del sistema  $\xi_s = 0.02$  y distintos valores del parámetro  $\rho$  para un proceso aleatorio de AB amplio.

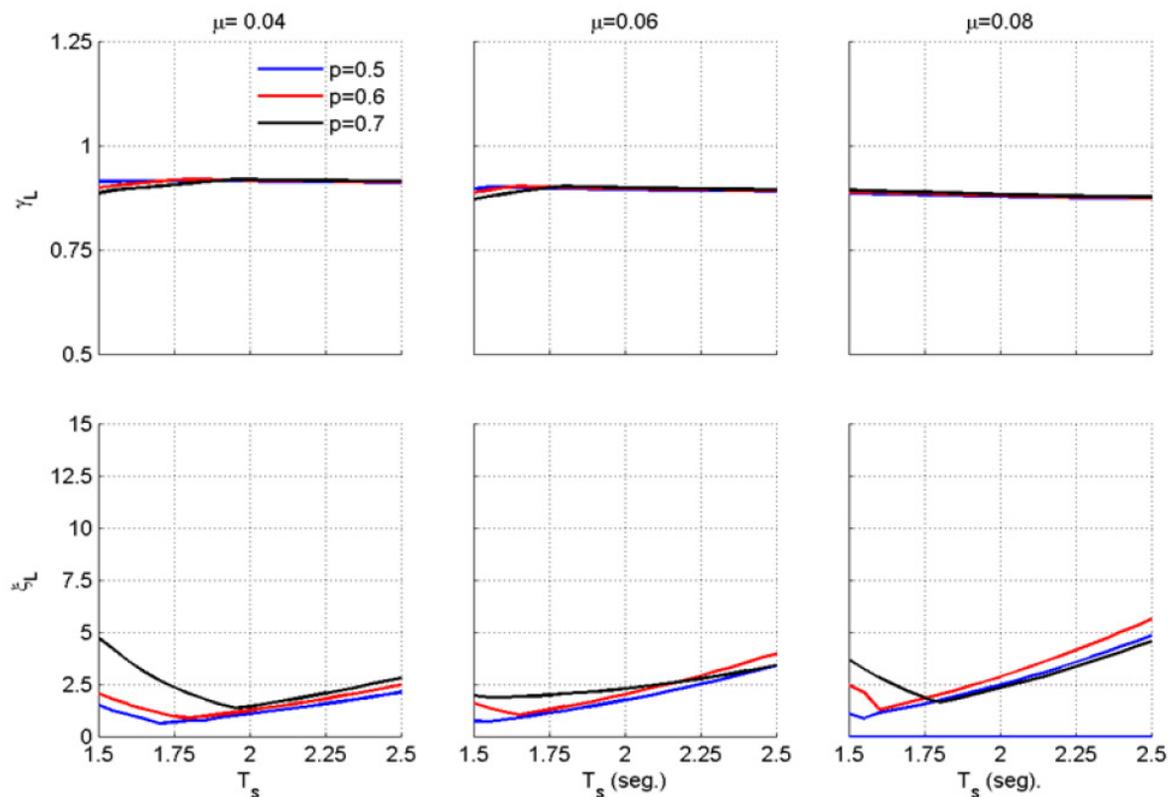
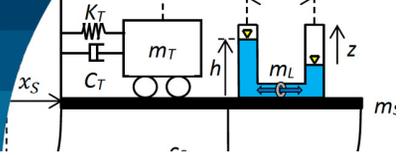


Figura 9: Razón de sintonía  $\gamma_L$  y coeficiente de pérdida de carga óptimos  $\xi_L$  en función del periodo de la estructura primaria  $T_s$  con amortiguamiento del sistema  $\xi_s = 0.02$  y distintos valores del parámetro  $\rho$  para un proceso aleatorio de AB angosto.



La Figura 8 muestra la sensibilidad de los parámetros óptimos del ACLS con respecto al periodo de la estructura  $T_s$ . De la misma forma que la Figura 6, se realiza el análisis, con respecto a la razón de masa del sistema completo y de la razón de longitud. De la fila superior de gráficas de la Figura 8, se observa que la razón de frecuencias del ACLS aumenta levemente con respecto al periodo de la estructura principal. Siendo también insensible para razones de masa mayores con respecto a la razón de longitud. Se observa también que para razones de masa pequeñas, esta tiene un comportamiento distinto cuando  $p = 0.5$ , valor para el cual la frecuencia óptima del ACLS se hace superior a la frecuencia de la estructura.

La Figura 9 muestra en forma análoga a lo presentado por la Figura 8, pero considerando un input de ancho de banda angosto. De ella se observa un comportamiento muy distinto al caso de BBP. De la fila superior de gráficas de la Figura 9, se observa que la razón de frecuencias óptimas del ACLS, es insensible al periodo del sistema principal, a la razón de masa y a la razón de longitud, adquiriendo un valor promedio de 0.9. En cuanto al coeficiente de pérdida de carga, se observa un descenso del valor de este con respecto al periodo hasta llegar a un mínimo en un valor de  $T_s$ , que es mayor a medida razón de longitud es mayor. Posteriormente, crece con respecto al periodo.

## Eficiencia del ACS óptimo con respecto a la razón de masa $\mu$

La Figura 10 muestra la eficiencia óptima del ACS con respecto a la razón de masa total  $\mu$ . La fila superior de gráficas de la Figura 10 muestra la eficiencia de ACS óptimo, cuando el contenido de frecuencias de la excitación sísmica es alto, y en la fila inferior cuando este es bajo. Cada una de las columnas corresponde a un periodo de la estructura, desde una estructura rígida, primera columna a la izquierda hasta una más flexible a la derecha. Cada curva corresponde a un  $\alpha$ , el cual es una porción de masa del ACLS con respecto a la masa total del ACS. La Figura 10, muestra la reducción de desplazamiento RD, cuya expresión se muestra en (27). Se observa que, cuando la excitación es de alto contenido de frecuencia, el porcentaje de reducción aumenta con la razón de masa  $\mu$  del ACS, es decir, aumenta la eficiencia. Además, es insensible a la flexibilidad de la estructura y tiene una eficiencia menor para razones de masa de líquido menores. Por otra parte, cuando la excitación sísmica es de bajo contenido de frecuencias, el ACLS óptimo aumenta su porcentaje de reducción a medida que aumenta la razón de masa. En cuanto a la flexibilidad, en excitaciones de NBP este dispositivo tiene una menor eficiencia a medida que la estructura tiene un periodo mayor.

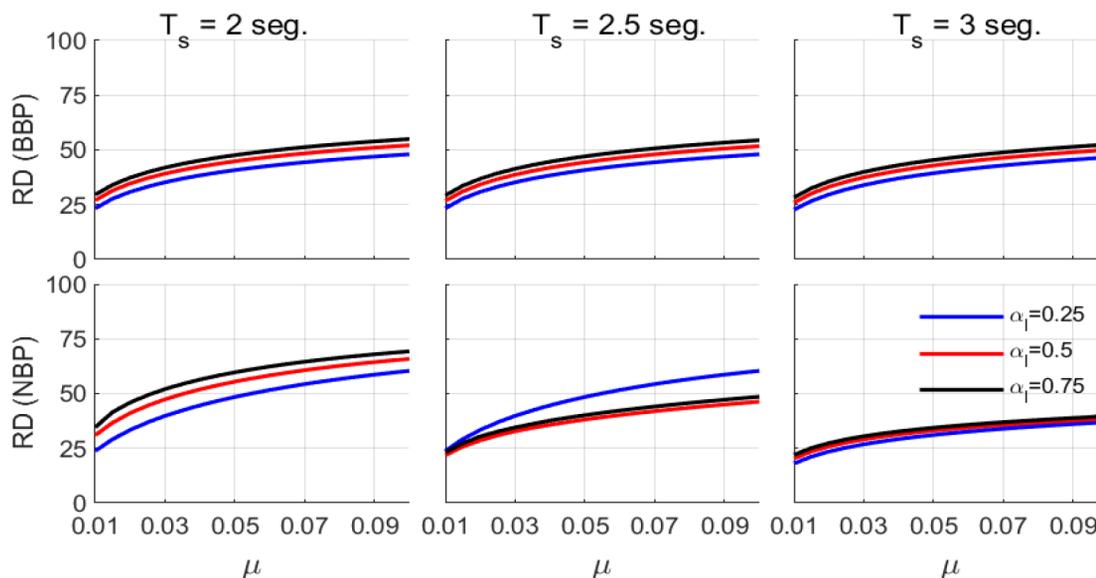


Figura 10: Reducción de desplazamiento  $RD$  en función de la razón de masa  $\mu$  y con amortiguamiento del sistema  $\xi_s = 0.02$  para ambos procesos aleatorios de AB amplio y angosto.

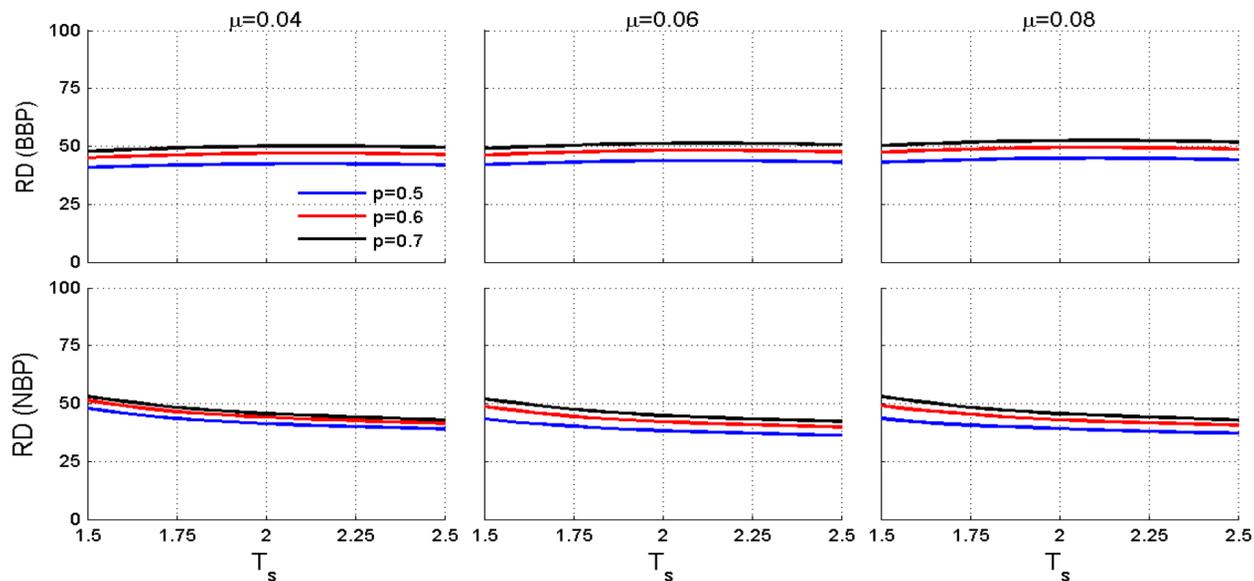
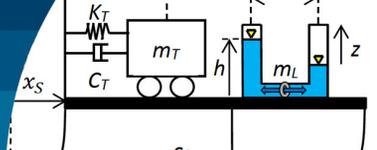


Figura 11: Reducción de desplazamiento  $RD$  en función del periodo de la estructura primaria ( $T_s$ ) y con amortiguamiento del sistema  $\xi_s = 0.02$  para ambos procesos aleatorios de AB amplio y angosto.

## Eficiencia del ACS con respecto al periodo de la estructura principal $T_s$

La Figura 11 muestra el porcentaje de reducción del ACS óptimo en función del periodo  $T_s$ , la disposición para distintas razones de masa es análoga a la de los periodos en la Figura 10. En cada gráfico se muestran distintas razones de longitud según el color de la línea de los gráficos. Se considera un porcentaje de masa para el AMS y ACLS de un 50% de la masa total. La fila superior de gráficas de la Figura 11 corresponde a una estructura controlada por un ACS óptimo antes una excitación BBP y la fila inferior para una NBP. Si se observa la Figura 11, cuando la excitación es de BBP la eficiencia del ACLS es insensible al periodo, a la razón de masa y es mayor cuando la razón de longitud es más alta. En excitaciones de NBP, a medida que aumenta el periodo de la estructura principal, la reducción del desplazamiento disminuye. No hay sensibilidad en el comportamiento de la eficiencia ante una variación de masa, ni de la razón de longitud.

## Conclusiones

Se concluye de esta investigación:

1. Los parámetros óptimos del ACS, son insensibles al contenido de frecuencias de la excitación a excepción del coeficiente de pérdida de carga.

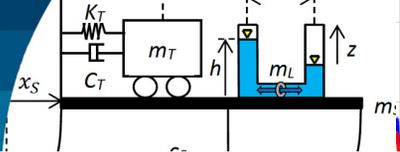
2. La eficiencia del ACS depende del contenido de frecuencias de la excitación.
3. El ACS es más eficiente a medida que la razón de masa del dispositivo ACS es mayor.
4. El ACS no se recomienda para estructuras altas.

## Agradecimientos

Los autores agradecen a la Universidad del Bío-Bío por el financiamiento otorgado para el desarrollo de esta investigación, a través de Proyecto Regular de Investigación UBB DIUBB 2260531 IF/R.

## Referencias

- Chakraborty, S., Debbarma, R. and Marano, G.C. (2012). Performance of tuned liquid column dampers considering maximum liquid motion in seismic vibration control of structures. *Journal of Sound and Vibration* 331(7), 1519–1531
- Clough, R. and Penzien, J. (1975). *Dynamics of structures*. McGraw-Hill, New York, USA.
- Crandall, S.H. and Mark, W.D. (1963). *Random vibration in Mechanical Engineering*. Academic Press: New York, USA



- Den Hartog, J.P. (1956). *Mechanical vibrations*. Fourth ed., Dover Publications, New York, USA
- Di Matteo, A., Lo Iacono, F., Navarra, G. and Pirrotta, A. (2015). Optimal tuning of tuned liquid column damper systems in random vibration by means of an approximate formulation. *Meccanica* **50**, 795-808
- Espinoza, G., Quinteros, C., Gajardo, K., Suazo, A. and Quijada, S. (2021a). Eficiencia de un amortiguador de columna de líquido sintonizado considerando una excitación sísmica de bajo contenido de frecuencias e incertidumbre. *Obras y Proyectos* **29**, 54-66
- Espinoza, G., Saavedra J., Gajardo, K., Suazo, A. y Cifuentes C. (2021b) Eficiencia de un amortiguador de columna de líquido considerando una excitación sísmica de alto contenido de frecuencias e incertidumbre. *Obras y Proyectos* **29**, 67-79
- Espinoza, G., Sagredo, G. y Suazo, A. (2020a). Análisis de la eficiencia de un amortiguador combinado sintonizado con incertidumbre en los parámetros sometido a una excitación sísmica de alto contenido de frecuencias. *Obras y Proyectos* **28**, 58-67
- Espinoza, G., Rivas, S. y Suazo, A. (2020b). Análisis de la eficiencia de un amortiguador combinado sintonizado con incertidumbre en los parámetros sometido a excitaciones sísmicas de bajo contenido de frecuencias. *Obras y Proyectos* **28**, 68-77
- Espinoza, G., Carrillo, C. and Suazo, A. (2018). Analysis of a tuned liquid column damper in non-linear structures subjected to seismic excitations. *Latin American Journal of Solids and Structures* **15**(7), e91
- Frahm, H. (1909). Device for damping vibrations of bodies. USA patent 0989958A
- Kamel, A.G. and Basily, R.M. (2021). Optimal passive structural control under extreme earthquake excitations using a combined pendulum tuned mass damper. *Journal of Applied Mathematics and Computational Mechanics* **20**(4), 51-64
- NCh2745 (2013). Análisis y diseño de edificios con aislación sísmica. Instituto Nacional de Normalización INN, Santiago, Chile
- Ormondroyd, J. and Den Hartog, J. (1928). The theory of dynamic vibration absorber. *Transactions of the American Society of Mechanical Engineers Journal of Applied Mechanics* **50**(7), 9-22
- Rozas, L., Boroschek, R.L., Tamburrino, A. and Rojas, M. (2016). A bidirectional tuned liquid column damper for reducing the seismic response of buildings. *Structural Control and Health Monitoring* **23**(4), 621-640
- Saitua, F., Lopez-Garcia, D., and Taflanidis, A.A. (2018). Optimization of height-wise damper distributions considering practical design issues. *Engineering Structures* **173**, 768-786
- Sakai, F., Takaeda, S. and Tamaki, T. (1989). Tuned liquid column damper - New type device for suppression of building vibrations. *First International Conference on High-Rise Buildings*, Nanjing, China, 926-931
- Sgobba, S. and Marano, G.C. (2010). Optimum design of linear tuned mass dampers for structures with nonlinear behaviour. *Mechanical Systems and Signal Processing* **24**(6), 1739-1755
- Shum, K.M. (2009). Closed form optimal solution of a tuned liquid column damper for suppressing harmonic vibration of structures. *Engineering Structures* **31**(1), 84-92
- Wang, L., Zhao, X. and Zheng, Y.M. (2016). A combined tuned damper and an optimal design method for wind-induced vibration control for super tall buildings. *The Structural Design of Tall and Special Buildings* **25**(10) 468-502
- Yalla, S.K. and Kareem, A. (2000). Optimum absorber parameters for tuned liquid column dampers. *Journal of Structural Engineering* **126**(8) 906-915