

Coeficiente de empuje en reposo – Jáky 1944

At-rest pressure coefficient – Jáky 1944

Fecha de entrega: 18 de marzo 2022
Fecha de aceptación: 16 de agosto 2022

Edgar Giovanni Díaz-Segura

Escuela de Ingeniería Civil, Pontificia Universidad Católica de Valparaíso, Av. Brasil 2950, Valparaíso, Chile, edgar.diaz@pucv.cl

El artículo originalmente titulado “A nyugalmi nyomás tényezője” (Coeficiente de empuje en reposo) del Dr. József Jáky publicado en 1944, se encuentra dentro de los más citados en ingeniería geotécnica, y su hipótesis aún sigue vigente. Sin embargo, el haberse publicado originalmente en húngaro, en parte ha dificultado el conocimiento de la formulación completa de su teoría, lo que ha conllevado a que una cantidad importante de autores se ciñan solo a referenciar una versión simplificada de la ecuación para la determinación del coeficiente de empuje en reposo, k_0 , sin hacer alusión a su origen, desconociendo en algunos casos que la ecuación propuesta es de tipo analítico y no empírico, y que es aplicable a materiales granulares de cualquier tipo, incluyendo cereales. El presente documento aporta una versión rigurosa del artículo original del Dr. Jáky, lo cual permite conocer las formulaciones, así como los límites de validez, que hay detrás de la determinación de k_0 usando la ampliamente conocida teoría de Jáky.

Palabras clave: k_0 , coeficiente de empuje en reposo, materiales granulares, ley de Jáky

The article originally titled “A nyugalmi nyomás tényezője” (At-rest pressure coefficient) by Dr József Jáky published in 1944, is among the most cited in geotechnical engineering, and his hypothesis is still valid. However, the fact that it was originally published in Hungarian has partially hindered the understanding of the full formulation of his theory. This has generated that a substantial number of authors sticking only to referencing a simplified version of the equation of at-rest pressure coefficient, k_0 , without referring to its origin, ignoring in some cases that the proposed equation is analytical and not empirical and that it is applicable to granular materials of any kind, including cereals. This paper supplies a rigorous version of Dr Jáky's original article, to provide information about the formulations, as well as the limits of validity, behind the determination of k_0 using the widely known Jáky theory.

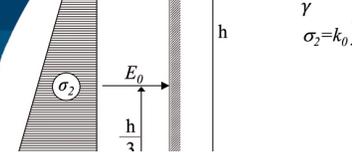
Keywords: k_0 , coefficient of earth pressure at rest, granular materials, Jáky theory

Introducción

Para análisis en los cuales se requiera la determinación de los estados de esfuerzo en un suelo, es habitual que se haga referencia a la ecuación propuesta por el Dr. Jáky en el artículo titulado “A nyugalmi nyomás tényezője”, aunque es también común encontrar referencias imprecisas sobre dicha ecuación. Una de las razones atribuibles a estas imprecisiones, es que el artículo original fue publicado en húngaro en 1944, lo cual limitó, en parte, la divulgación del planteamiento completo para el cálculo de k_0 . Por esta razón, una cantidad importante de citas dadas a este trabajo, sólo se limitan a referenciar una ecuación simplificada para la determinación del coeficiente k_0 , desconociendo las diferentes consideraciones que hay detrás de la propuesta

del Dr. Jáky, como por ejemplo que el método propuesto es de origen analítico y no empírico o semi empírico, y que es aplicable para el diseño de silos, por lo que incluye la evaluación de k_0 para diferentes materiales granulares, incluyendo avena, centeno y maíz (Jáky, 1948).

A la fecha el artículo del Dr. Jáky (1944b), pese a contar con detractores, es quizá uno de los más citados de la ingeniería geotécnica, el cual sigue vigente y aún suscita tema de discusión por diferentes investigadores, dada la importancia que tiene el coeficiente k_0 en la resolución de cualquier problema geotécnico (Brooker y Ireland, 1965; Mayne y Kulhawy, 1982; Mesri y Hayat, 1993; Michalowski, 2005).



Por lo anterior, a continuación se presenta una versión rigurosa del artículo original completo del Dr. Jáký, traducido del húngaro al español, con lo cual se espera contribuir en el conocimiento sobre la formulación propuesta, así como para definir los límites de validez que hay detrás de la ampliamente conocida y usada Ley de Jáký. Para el presente documento se usó la nomenclatura y la numeración de las ecuaciones del artículo original cuya referencia completa es la siguiente:

Dr. József Jáký (1944). A nyugalmi nyomás tényezője (Coeficiente de empuje en reposo). A Magyar Mérnök-és Építész-Egylet Közlönyének (Revista de la Sociedad Húngara de Arquitectos e Ingenieros), 78(22), 355-358. La Sociedad Húngara de Arquitectos e Ingenieros fue disuelta en el año 1944 y junto con ello la Revista dejó de circular ese mismo año.

El concepto de empuje natural del suelo

El empuje ejercido por un suelo o por cualquier material granular sobre un muro de contención que no se desplace lateralmente, ni se incline o gire, se denomina empuje natural o empuje en reposo. Tal empuje se presenta sobre cualquier plano de la corteza terrestre. Estudios experimentales (Terzaghi, 1925) y teóricos (Gersevanoff, 1936) muestran que para el estado de esfuerzo en reposo en un material granular suelto, la relación entre los esfuerzos horizontal y vertical es constante, lo que significa que:

$$\sigma_2 = k_0 \sigma_1 \tag{1}$$

Por ejemplo, experimentos del profesor Terzaghi indican que en arena el coeficiente de empuje en reposo, k_0 , es igual a 0.42 (Terzaghi, 1925).

Por su parte en suelos cohesivos, el Prof. Gersevanoff (1936) determinó que:

$$\frac{\sigma_2}{\sigma_1} = k - \frac{r}{\sigma_1} \tag{2}$$

es decir, que el coeficiente de empuje en reposo varía hiperbólicamente. Por ejemplo, en suelos arcillosos se tiene que: $\frac{\sigma_2}{\sigma_1} = 0.65 - \frac{0.21}{\sigma_1}$.

El estado de esfuerzo en reposo se presenta en un terreno

infinitamente extenso en la dirección horizontal. Debido al tamaño de esta masa, un muro vertical compuesto por suelo, AB (Figura 1), no se moverá horizontalmente y el movimiento en vertical se deberá completamente a la compactación del material por su peso propio.

Se puede demostrar que en un terreno de extensión infinita, las trayectorias de esfuerzos principales corresponden a las direcciones verticales y horizontales, ya que de acuerdo con la ecuación de Cauchy (Figura 1):

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau}{\partial x} &= \gamma \\ \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau}{\partial y} &= 0 \end{aligned} \right\} \tag{3}$$

Derivando por partes, se tiene que $\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} = 0$ y $\frac{\partial \tau}{\partial x} = 0$, por lo tanto, $\frac{\partial \tau}{\partial y} = 0$, es decir:

$$\tau = 0 \tag{4}$$

De este modo, los esfuerzos en la dirección de σ_y y σ_x son esfuerzos principales, así:

$$\sigma_y = \sigma_1 = \gamma y \tag{5a}$$

$$\sigma_x = \sigma_2 = f(y) \tag{5b}$$

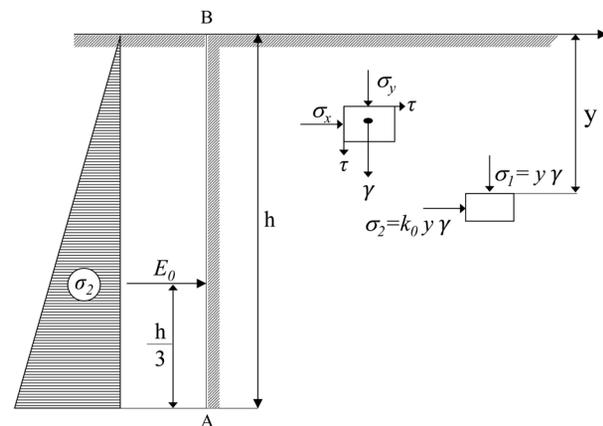
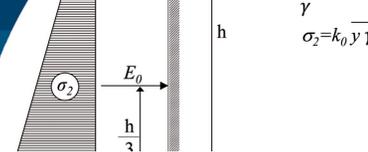


Figura 1: Estado de esfuerzo en un terreno de extensión horizontal infinita

De acuerdo con la ecuación (1) la relación entre los esfuerzos principales σ_1 y σ_2 es constante, por consiguiente:

$$\sigma_2 = k_0 \sigma_1 = k_0 \gamma y \tag{6}$$



A partir de lo anterior, la distribución de esfuerzos producto del empuje natural del suelo es triangular y su resultante, la cual actúa a 1/3 de la altura h (Figura 1), se calcula como:

$$E = k_0 \frac{h^2 \gamma}{2} \quad (7)$$

Para un muro de contención con respaldo AB inclinado un ángulo β (Figura 2), la resultante del empuje tiene una componente E_0 actuando sobre una sección vertical, y una componente G correspondiente al peso del prisma de suelo ABB_0 . Del polígono de vectores (Figura 2) se tiene que:

$$E = \sqrt{G^2 + E_0^2}$$

siendo:

$$G = \frac{h^2 \gamma}{2} \cot \beta$$

$$E_0 = \frac{h^2 \gamma}{2} k_0$$

por lo tanto:

$$E = \frac{h^2 \gamma}{2} \sqrt{\cot^2 \beta + k_0^2} \quad (8)$$

y la dirección del empuje natural del suelo es:

$$\tan(90^\circ - \beta + \delta) = \frac{G}{E_0} = \frac{\cot \beta}{k_0}$$

o

$$\tan \delta = \frac{1 - k_0}{\cot \beta + k_0 \tan \beta} \quad (9)$$

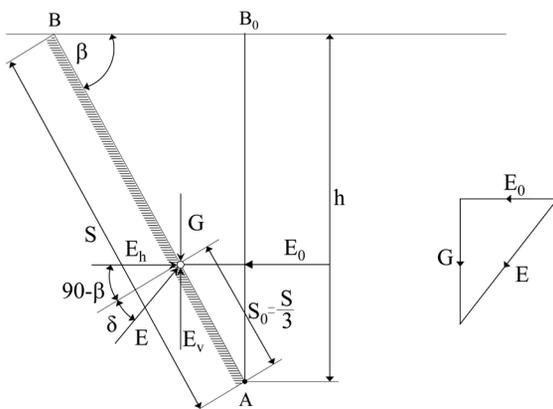


Figura 2: Empuje natural de suelo sobre un muro con respaldo inclinado

Debido a que las componentes de E (E_0 y G) están aplicadas en el tercio inferior de la línea AB (Figura 2), el empuje natural de suelo E se genera en este punto. Así:

$$s_0 = \frac{S}{3} \quad (10)$$

El caso más general de empuje natural de suelo se puede determinar mediante las ecuaciones (8)-(10), ya que su magnitud, dirección y punto de aplicación son conocidas. No obstante, se requiere el valor de k_0 el cual, por lo que se sabe, sólo podría determinarse experimentalmente.

A continuación el autor demuestra que la evaluación experimental de k_0 no es necesaria. En materiales friccionantes el coeficiente k_0 está relacionado simple e inequívocamente con el ángulo de fricción, φ . Por lo tanto, cuando el ángulo φ es conocido, mediante el análisis de la pendiente natural puede determinarse de forma simple el coeficiente k_0 .

Para un material granular apilado como un prisma triangular, se puede demostrar mediante la teoría de fricción de Coulomb que:

$$\alpha_{max} = \varphi \quad (11)$$

es la pendiente natural del prisma de material granular, cuya magnitud, igual al ángulo de fricción φ , es independiente de la altura, h (Figura 3). El prisma OAB está en equilibrio y su superficie y puntos interiores están inmóviles. Por lo tanto, el empuje que actúa sobre la sección vertical OC , es el empuje en reposo. Si el estado de esfuerzo es conocido, el empuje sobre la sección OC puede determinarse como una función del ángulo de fricción, φ . Por lo tanto, a partir de la ecuación (7) es posible obtener la función que se busca, es decir:

$$k_0 = f(\varphi) \quad (12)$$

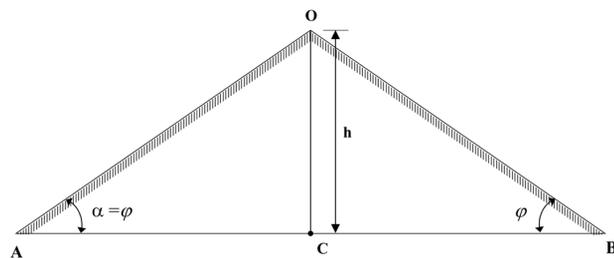
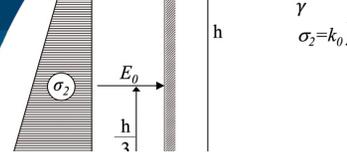


Figura 3: La pendiente natural



Estado de esfuerzo en un terreno con fronteras laterales en pendiente natural

A partir del estudio de problemas de empuje en terrenos con fronteras laterales inclinadas un ángulo φ (Jáky, 1943), se conoce que existen planos de deslizamiento de los cuales un primer grupo están inclinados respecto a la horizontal un ángulo $\alpha = \varphi$, mientras que un segundo grupo cruzan a los primeros en un ángulo $(90^\circ - \alpha)$ y por lo tanto están orientados verticalmente. Sin embargo, los planos de deslizamiento se extienden sólo hasta el plano OB, es decir, están presentes en la zona I (Figura 4). Los planos de deslizamiento no pueden extenderse a la zona II (Figura 4) porque en ese caso el plano OC sería un plano de deslizamiento. Ya que OC es un plano de simetría, no se desarrollan los esfuerzos cortantes, $\tau = 0$. Por lo tanto, el plano OC es una trayectoria de esfuerzo principal y no es un plano de deslizamiento.

En la zona I las trayectorias de esfuerzos bisectan el ángulo entre los planos de deslizamiento $(90^\circ - \varphi)$. Por lo tanto, en esta zona las trayectorias de esfuerzos principales forman con la horizontal un ángulo:

$$\alpha_1 = 45^\circ + \frac{\varphi}{2} \tag{13}$$

y el plano OC es la última trayectoria de esfuerzos principales (Figura 4), ya que este pasa a través del extremo superior de la superficie del terreno. En la Figura 4 los planos de deslizamiento son dibujados en el lado izquierdo y las trayectorias de esfuerzos principales al lado derecho. El estado de esfuerzo en la zona I es conocido completamente, siendo el esfuerzo cortante una función lineal deducida a partir de la condición de equilibrio en coordenadas x e y :

$$t = y \gamma \sin \phi \cos \phi - x \gamma \sin^2 \phi \tag{14}$$

Sustituyendo en las ecuaciones diferenciales de Cauchy, los esfuerzos en la dirección x e y pueden determinarse de la siguiente forma:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_y &= t \frac{1 + \sin^2 \varphi}{\sin \varphi \cos \varphi} \\ \sigma_x &= t \cot \varphi \\ \tau &= t \end{aligned} \right\} \tag{15}$$

Sobre la frontera OB (Figura 4), $x_1 = y \tan(45^\circ - \frac{\varphi}{2})$ y el esfuerzo de corte se calcula como:

$$t = x_1 \gamma \sin \varphi \tag{16}$$

Los esfuerzos en la dirección x e y son:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{y1} &= x_1 \gamma \frac{1 + \sin^2 \varphi}{\cos \varphi} \\ \sigma_{x1} &= x_1 \gamma \cos \varphi \\ \tau_1 &= x_1 \gamma \sin \varphi \end{aligned} \right\} \tag{17}$$

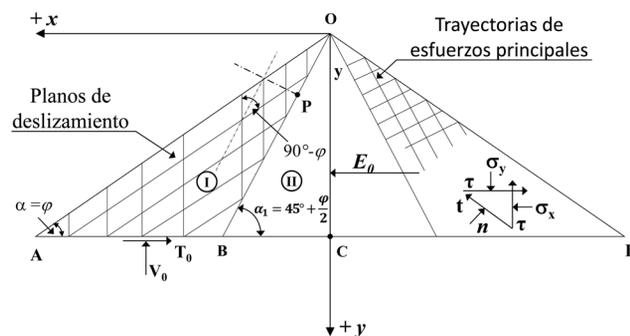
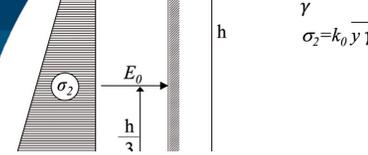


Figura 4: Planos de deslizamiento en un terreno en condición de reposo

Los esfuerzos en la zona II aún no pueden determinarse porque las direcciones de los esfuerzos principales y de los planos de deslizamiento son desconocidas. Si bien OB y OC son planos principales, los planos entre ellos con origen en el punto O no lo son (Figura 4), ya que si así fuera, las curvas, tipo espiral logarítmica, que los interceptan en un ángulo de $(45^\circ - \varphi/2)$ serían planos de deslizamiento. Estudios anteriores (Jáky, 1944a) demostraron que los múltiples planos de deslizamiento en un terreno podrían ser sólo familias de planos.

En un prisma triangular de suelo OBC (Figura 4) no se forman planos de deslizamiento y en falla sólo puede deslizarse sobre un plano. Bajo las anteriores condiciones los esfuerzos en la zona II pueden determinarse como a continuación se indica.

En primera instancia se tiene que los valores de los esfuerzos de corte τ son cero a lo largo de OC e iguales a τ_1 ($\tau = \tau_1$) sobre el plano OB (Figura 5). Asumiendo que la variación de τ entre estos dos valores se represente como una función parabólica de segundo orden en términos de x



(Figura 5), para cualquier punto con coordenadas x e y , τ queda definido como:

$$\tau = \tau_1 \frac{x^2}{x_1^2} \quad (18)$$

Substituyendo los valores de τ y x definidos previamente, se tiene que:

$$\tau = \frac{x^2}{y} \gamma \operatorname{sen} \varphi \tan \left(45^\circ + \frac{\varphi}{2} \right) \quad (19)$$

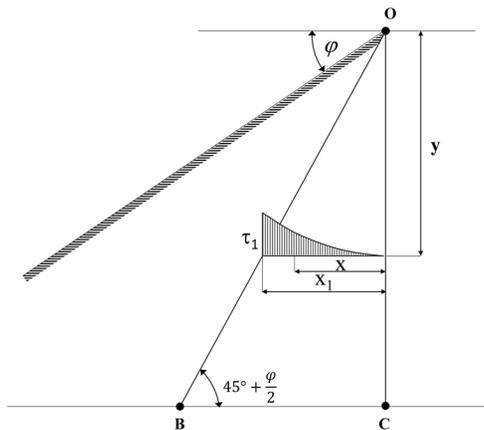


Figura 5: Distribución del esfuerzo cortante, τ

Los otros dos esfuerzos (σ_y y σ_x) pueden determinarse mediante la ecuación (19) y las ecuaciones de equilibrio de Cauchy de la siguiente forma:

$$\frac{\partial \sigma_y}{\partial y} = \gamma - \frac{\partial \tau}{\partial x} = \gamma - \frac{2x}{y} \gamma \operatorname{sen} \varphi \tan \left(45^\circ + \frac{\varphi}{2} \right)$$

de donde se tiene que:

$$\sigma_y = y \gamma - 2x \gamma \operatorname{sen} \varphi \tan \left(45^\circ + \frac{\varphi}{2} \right) \ln y + f(x) \quad (20)$$

Sobre la línea OB (Figura 5):

$$y = x_1 \tan \left(45^\circ + \frac{\varphi}{2} \right)$$

y

$$\sigma_y = x_1 \gamma \frac{1 + \operatorname{sen}^2 \varphi}{\cos \varphi}$$

Substituyendo las anteriores expresiones en la ecuación (20):

$$f(x) = 2x \gamma \operatorname{sen} \varphi \tan \left(45^\circ + \frac{\varphi}{2} \right) \ln \left[x \tan \left(45^\circ + \frac{\varphi}{2} \right) \right] - x \gamma \operatorname{sen} \varphi \cot \left(45^\circ + \frac{\varphi}{2} \right)$$

por lo tanto:

$$\sigma_y = y \gamma - 2x \gamma \operatorname{sen} \varphi \tan \left(45^\circ + \frac{\varphi}{2} \right) \ln \frac{y}{x \tan \left(45^\circ + \frac{\varphi}{2} \right)} - x \gamma \operatorname{sen} \varphi \tan \left(45^\circ - \frac{\varphi}{2} \right) \quad (21)$$

A partir de la ecuación (21) sobre la línea vertical OC ($x = 0$) se tiene que:

$$\sigma_{y0} = y \gamma \quad (22)$$

es decir, los estados de esfuerzos sobre la línea OC son homólogos a los que se presentan en un terreno de extensión horizontalmente infinita (ver ecuaciones (4) - (6)).

Para la determinación de σ_x se debe tener en consideración que:

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} = -\frac{\partial \tau}{\partial y} = \frac{x^2}{y^2} \gamma \operatorname{sen} \varphi \tan \left(45^\circ + \frac{\varphi}{2} \right)$$

donde:

$$\sigma_x = \frac{x^3}{3y^2} \gamma \operatorname{sen} \varphi \tan \left(45^\circ + \frac{\varphi}{2} \right) + g(y) \quad (23)$$

Para $x = 0$, $\sigma_x = \sigma_{x0}$, por lo tanto $g(y) = \sigma_{x0}$. Por otra parte, en $x_1 = y \tan \left(45^\circ + \frac{\varphi}{2} \right)$, es decir, sobre la línea OB de la ecuación (17) se tiene que:

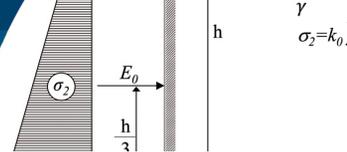
$$\sigma_x = \sigma_{x1} = x_1 \gamma \cos \varphi = y \gamma (1 - \operatorname{sen} \varphi)$$

Substituyendo σ_x en la ecuación (23):

$$\sigma_{x0} = y \gamma (1 - \operatorname{sen} \varphi) \frac{1 + \frac{2}{3} \operatorname{sen} \varphi}{1 + \operatorname{sen} \varphi} \quad (24)$$

De acuerdo con las ecuaciones (22) y (23), el coeficiente de empuje en reposo queda definido como:

$$k_0 = \frac{\sigma_{x0}}{\sigma_{y0}} = (1 - \operatorname{sen} \varphi) \frac{1 + \frac{2}{3} \operatorname{sen} \varphi}{1 + \operatorname{sen} \varphi} \quad (25a)$$



o:

$$k_0 = \left(1 + \frac{2}{3} \text{sen } \varphi\right) \tan^2 \left(45^\circ - \frac{\varphi}{2}\right) \quad (25b)$$

La relación entre k_0 y φ se muestra en la Figura 6. Por ejemplo para $\varphi = 30^\circ$, $k_0 = \frac{4}{9} = 0.44$.

Si una función $z = \frac{1 + \frac{2}{3} \text{sen } \varphi}{1 + \text{sen } \varphi}$ se representa en un sistema coordenado $(z, \text{sen } \varphi)$, $z \cong 0.9$ para un rango de valores de φ entre 20° y 45° (Figura 7). Por lo tanto, k_0 puede expresarse de forma simplificada como:

$$k_0 = 0.9 (1 - \text{sen } \varphi) \quad (26)$$

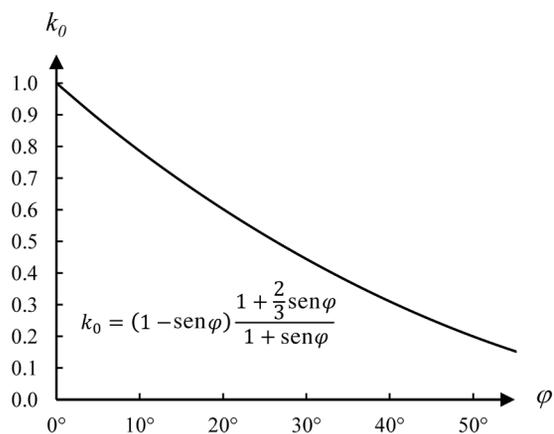


Figura 6. Coeficiente k_0 en función de φ

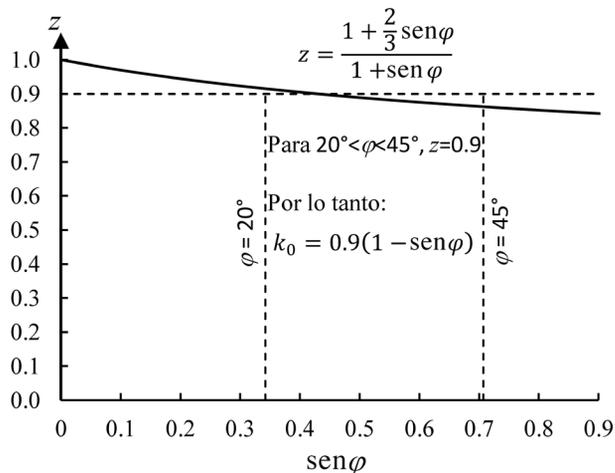


Figura 7. Representación de la función $z = f(\text{sen } \varphi)$

El valor del coeficiente de empuje en reposo es muy importante para la solución de problemas de empuje de suelos, en especial para el caso de cálculo del empuje en silos. En la Tabla 1 se han resumido, el ángulo de

fricción, peso unitario y coeficiente de empuje en reposo para diferentes materiales, incluyendo granos cereales y productos mineros.

Tabla 1: Ángulo de fricción, peso unitario y coeficiente de empuje en reposo para diferentes materiales

Material	Ángulo de fricción, φ	Peso unitario, ton/m ³	Coeficiente de empuje en reposo, k_0
Limo	20°	1.90	0.593
Arena fina	26°	1.90	0.505
Arena gruesa	32°	1.80	0.416
Grava	35°	1.80	0.378
Avena	30°	0.80	0.445
Centeno	29°	0.75	0.459
Maíz	36°	0.70	0.361
Cemento	40°	1.40	0.310

Síntesis

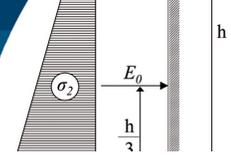
Para un muro vertical que no se desliza lateralmente, un material granular no cohesivo retenido ejerce un empuje natural que puede expresarse como $E_0 = k_0 y^2 \gamma$. Por consiguiente, para un muro inclinado el empuje natural puede calcularse mediante la ecuación (8). El autor demostró que el empuje sobre una línea vertical que pasa a través del punto más alto de un prisma triangular de suelo con inclinación natural, corresponde al empuje en reposo. En la zona II del prisma de suelo (Figura 2), los estados de esfuerzo pueden determinarse usando el ángulo de fricción φ y lo asumido en la ecuación (18), y el coeficiente de empuje en reposo, $k_0 = f(x)$, puede ser calculado a partir de las ecuaciones (25a) o (25b).

En la Tabla 1 se presenta un resumen de los valores del coeficiente de empuje en reposo para varios materiales granulares.

Referencias

Brooker, E.W. and Ireland, H.O. (1965). Earth pressures at rest related to stress history. *Canadian Geotechnical Journal* 2(1), 1–15

Gersevanoff, N. (1936). Improved methods of consolidation test and of the determination of capillary pressure in soils. *Proceedings of the First International Conference on Soil Mechanics and Foundation Engineering*, Cambridge MA, USA, vol. 1, 47-50



- Jáký, J. (1948). Pressure in silos. *Proceedings of the Second International Conference on Soil Mechanics and Foundation Engineering*, Rotterdam, the Netherlands, vol. 1, 103–107
- Jáký, J. (1944a). Földművek csúszólapjai. *A Magyar Mérnök- és Építész-Egylet Közlönyének* **78**(17), 269-276.
- Jáký, J. (1944b). A nyugalmi nyomás tényezője. *A Magyar Mérnök- és Építész-Egylet Közlönyének* **78**(22), 355-358
- Jáký, J. (1943). A természetes földnyomás. *Technika* 9.
- Mayne, P.W. and Kulhawy, F.H. (1982). K_0 –OCR relationship in soil. *Journal of the Geotechnical Engineering Division* **108**(6), 851–872
- Mesri, G. and Hayat, T.M. (1993). The coefficient of earth pressure at rest. *Canadian Geotechnical Journal* **30**(4), 647–666
- Michalowski, R.L. (2005). Coefficient of earth pressure at rest. *Journal of Geotechnical and Geoenvironmental Engineering* **131**(11), 1429-1433
- Terzaghi, K. (1925). *Erdbaumechanik auf bodenphysikalischer Grundlage*. F. Deuticke, Wien, Austria