

# Eficiencia de un amortiguador de columna de líquido sintonizado considerando una excitación sísmica de bajo contenido de frecuencias e incertidumbre

Efficiency of a tuned liquid column damper considering a seismic excitation of low frequency content and uncertainty

Fecha de entrega: 28 de septiembre 2020

Fecha de aceptación: 29 de marzo 2021

Gilda Espinoza, Christian Quinteros, Kristel Gajardo, Álvaro Suazo y Sergio Quijada

Departamento de Ingeniería Civil y Ambiental, Universidad del Bío-Bío, Avenida Collao 1202, Casilla 5-C, Concepción, Chile, [gspinoz@ubiobio.cl](mailto:gspinoz@ubiobio.cl), [chquinte@egresados.ubiobio.cl](mailto:chquinte@egresados.ubiobio.cl), [kgajardo@egresados.ubiobio.cl](mailto:kgajardo@egresados.ubiobio.cl), [asuazo@ubiobio.cl](mailto:asuazo@ubiobio.cl), [squijada@ubiobio.cl](mailto:squijada@ubiobio.cl)

*En esta investigación se analiza el comportamiento de una estructura lineal controlada por un amortiguador de columna de líquido sintonizado (ACLS), la que es sometida a excitaciones sísmicas estocásticas de bajo contenido de frecuencia. Para incluir la naturaleza no lineal del ACLS, se realiza una linealización estadística equivalente. Se estudia el comportamiento de los parámetros óptimos de diseño del ACLS, razón de frecuencias y coeficiente de pérdida de carga, cuando se ingresa incertidumbre en parámetros del sistema. Los parámetros considerados, fueron la razón de masa, la razón de longitud y el coeficiente de pérdida de carga. El objetivo de la optimización, es la reducción de la desviación estándar del desplazamiento de la estructura. Se analiza el efecto de la inclusión de incertidumbre en los parámetros, en la reducción del desplazamiento de la estructura, y en la raíz cuadrática media RMS del desplazamiento de la estructura. Se encuentra que una incertidumbre en la razón de masa, y en la razón de longitud del ACLS, no produce variaciones en la eficiencia ni en el RMS de desplazamiento de la estructura. Sin embargo, una incertidumbre en el valor del periodo de la estructura produce grandes variaciones en la eficiencia y el RMS del desplazamiento de la estructura.*

*Palabras clave: ACLS, incertidumbre en los parámetros, análisis estocástico, bajo contenido de frecuencia*

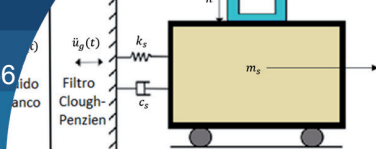
*In this research the behaviour of a linear structure controlled by a tuned liquid column damper (TLCD) subjected to stochastic seismic excitations of low frequency content is analysed. To accommodate the non-linear nature of TLCD, an equivalent statistical linearization is performed. The behaviour of the optimal TLCD design parameters, frequency ratio and pressure loss coefficient, when entering uncertainty in system parameters, is studied. The parameters considered were the mass ratio, the length ratio and the pressure drop coefficient. The optimization objective is to reduce the standard deviation of the displacement of the structure. The effect of the inclusion of uncertainty in the parameters, in the reduction of the displacement of the structure, and in the root mean square RMS of the displacement of the structure is analysed. It is found that an uncertainty in the mass ratio, and in the TLCD length ratio, does not produce variations in the efficiency or in the RMS of displacement of the structure. However, an uncertainty in the value of the period of the structure produces large variations in the efficiency and the RMS of the displacement of the structure.*

*Keywords: TLCD, parameter uncertainty, stochastic analysis, low frequency content*

## Introducción

El objetivo principal del diseño sismorresistente es entregar capacidad suficiente a la estructura para resistir

excitaciones sísmicas. Estas excitaciones pueden dividirse en excitaciones de alto contenido de frecuencias y en excitaciones de bajo contenido frecuencia. En términos



teóricos, no existe una definición exacta de clasificación de cada uno de los contenidos. En general, se define si es una señal de alto o bajo contenido de Fourier en forma relativa, a través de la utilización del espectro de Fourier. Las excitaciones sísmicas de bajo contenido de frecuencias se producen en sitios con grandes espesores de estratos de suelo blando, por ejemplo, suelo arcilloso, como en Ciudad de México. Durante las últimas décadas, se han desarrollado nuevas metodologías y sistemas antisísmicos con el fin de controlar la respuesta de las estructuras por medio de la modificación de las características dinámicas de éstas, permitiendo de esta manera, satisfacer la ecuación de equilibrio a través de la reducción de la demanda. Dentro de estos estudios, se encuentran los sistemas de control, efecto-masa, los que se caracterizan por sus propiedades inerciales. Entre ellos se distinguen dos tipos, el amortiguador de masa sintonizado AMS y el amortiguador de columna de líquido sintonizado ACLS.

Dentro de los dispositivos más utilizados está el ACLS. Este consiste en un tubo en forma de U que contiene líquido en su interior, generalmente agua. Posee en su parte inferior horizontal un orificio que genera una pérdida de carga. Su funcionamiento se explica a través de la disipación de energía, provocada a través de una acción combinada del movimiento del líquido en el contenedor, debido a la fuerza de restauración del líquido, por la gravedad y el paso del líquido a través del orificio, que genera una pérdida de carga (Chakraborty *et al.*, 2012).

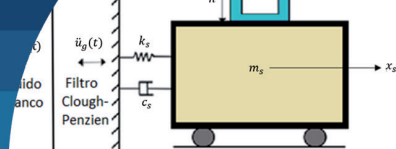
Los primeros estudios en relación a este sistema de amortiguamiento se enfocan en la determinación de las propiedades óptimas del ACLS para el control de los desplazamientos producidos por el viento. Xu *et al.* (1992) contrastan la eficiencia de los ACLS con los AMS en estructuras sensibles al viento, concluyendo que un ACLS tiene ventajas prácticas respecto a los AMS, tales como bajo costo y fácil manejo e instalación, además de poseer una eficiencia similar a los AMS. Posteriormente, Won *et al.* (1996) extienden el uso de ACLS a eventos sísmicos, utilizando un modelo estocástico no estacionario para representar un movimiento sísmico fuerte y evaluar el desempeño de un ACLS para el control pasivo de estructuras flexibles. Se llevó a cabo un estudio sobre los parámetros de diseño, tales como, la razón de masa, coeficiente de pérdida de carga y razón de sintonía. Concluyendo que

los parámetros de diseños dependen del contenido de frecuencia, intensidad y duración de la carga aplicada. Ghosh y Basu (2004) investigaron la eficacia del ACLS en el control de estructuras con periodo de corta duración sometidas a excitaciones sísmicas. Utilizaron un modelo donde el ACLS se conecta por medio de un resorte a la estructura principal, removiendo los requerimientos sobre el período natural del líquido del ACLS. Los resultados muestran que con el sistema propuesto se logra reducir el desplazamiento de la estructura inclusive hasta la mitad.

Chakraborty *et al.* (2012) realizaron un estudio numérico del desempeño sísmico del ACLS considerando el efecto de la restricción impuesta sobre el máximo desplazamiento del líquido dentro del recipiente. Investigaciones más recientes realizadas por Zhu *et al.* (2015) plantean la utilización de la técnica de simulación híbrida en tiempo real, en donde el prototipo de un ACLS es modelado como una subestructura física y sometido a excitaciones basales a través de una mesa vibratoria, mientras que la estructura principal se simula numéricamente en un computador. Esta técnica la utilizaron para estudiar el comportamiento dinámico de estructuras a la cuales se les ha adicionado un ACLS con el objetivo de disminuir respuestas modales simples y múltiples. Rozas *et al.* (2016) propusieron un sistema de dos ACLS independientes dispuestos en direcciones ortogonales sometido a excitaciones del tipo ruido blanco para reducir la respuesta sísmica en estructuras que tienen vibraciones en dos direcciones perpendiculares. Los resultados muestran que la efectividad de este sistema es mayor cuando se usa para controlar estructuras con bajo amortiguamiento.

Espinoza *et al.* (2018) analizan el comportamiento de un ACLS en una estructura no lineal ante excitaciones sísmicas de alto y bajo contenido de frecuencias. Obtienen los parámetros de diseño óptimos del ACLS para la minimización del desplazamiento del sistema estructural, para la reducción de la energía histerética y para un ponderado de ambos. Los resultados muestran que, para una excitación de ancho de banda amplio, el ACLS se sintoniza con la segunda frecuencia lineal equivalente, y para una excitación de ancho de banda angosto, se sintoniza con la frecuencia predominante del input.

Furtmüller *et al.* (2019) analizan ACLS, como un dispositivo de protección sísmica para el control de una



estructura aislada, en base a un estudio experimental del ACLS. Los resultados muestran que el ACLS combinado con un aislamiento de base, reduce la demanda de desplazamiento del subsistema de aislamiento de base, así como la demanda de aceleración total si ambos dispositivos están ajustados adecuadamente.

Debbarma *et al.* (2010) proponen un modelo matemático, para analizar la inclusión de incertidumbre en los parámetros, de una estructura de un grado de libertad controlado por una ACLS óptimo. Los parámetros son considerados como variables aleatorias. La incertidumbre es ingresada al hacer la variación de la ecuación de Lyapunov con respecto a los parámetros, y obteniendo así la variación de la matriz de covarianza. De esta forma se puede calcular la variación en el sentido positivo y negativo. Se han realizado estudios que analizan la eficiencia de un ACLS en el control de desplazamiento de estructuras sometidas a procesos aleatorios sísmicos con incertidumbre en los parámetros (Debbarma *et al.*, 2010). Sin embargo, no se ha definido el tipo específico de excitación estocástica a considerar.

Espinoza *et al.* (2020a) analizan la eficiencia de un amortiguador combinado sintonizado (ACS) con incertidumbre en los parámetros sometidos a excitaciones sísmicas del alto contenido de frecuencias y bajo contenido de frecuencias (Espinoza *et al.*, 2020b). El ACS es un dispositivo compuesto por un amortiguador de columna de líquido sintonizado ACLS, y un amortiguador de masa sintonizado (AMS). Estas investigaciones concluyen que, en el caso de sismos de ancho de banda amplio o alto contenido de frecuencias, el coeficiente de pérdida de carga es el que presenta más sensibilidad, ante una incertidumbre en la razón de longitud (Espinoza *et al.* 2020a). Y en el caso de excitaciones sísmicas de bajo contenido de frecuencias (Espinoza *et al.*, 2020b), el ACS posee una eficiencia máxima, si el periodo de la estructura, coincide con el periodo predominante de la excitación sísmica.

Si bien es cierto, esta investigación posee un objetivo similar al de Espinoza *et al.* (2020b), el dispositivo analizado en este estudio es distinto y por lo tanto, el modelo considerado es distinto.

El estudio contempla una excitación sísmica estocástica de ancho de banda angosto o de bajo contenido de frecuencias.

Este tipo de excitaciones son típicas en ciudades fundadas en depósitos de suelos blandos, como por ejemplo Ciudad de México. Esto se produce, porque el estrato de suelo se comporta como un filtro con una frecuencia muy predominante, que filtra el contenido de frecuencias generadas en la roca, entregando potencia en la frecuencia predominante del suelo y cancelando las demás.

En esta investigación se estudia el comportamiento de un ACLS óptimo, y su eficiencia, medida en términos del control de desplazamiento de la estructura principal, cuando se introduce una variación o incertidumbre en el valor de las propiedades del ACLS o de la estructura, y es sometida a sismos de bajo contenido de frecuencias. El caso de una excitación sísmica de alto contenido de frecuencias con incertidumbre es abordado en Espinoza *et al.* (2021).

## Modelo estructural y ecuaciones de movimiento

### Modelo de estudio $M_1$

El modelo de estudio  $M_1$  se muestra en la Figura 1. Este consiste en un sistema principal de dos grados de libertad. Donde  $X_s$  es el desplazamiento de la estructura principal en el eje horizontal e  $y$  es el desplazamiento del líquido dentro de la columna en el eje vertical. Este consiste en un tubo en forma de U, con agua en su interior, que posee un orificio en la parte inferior horizontal. Las propiedades de la parte principal del modelo  $M_1$ , son la rigidez elástica  $k_s$ , amortiguamiento  $C_s$  y masa de la estructura  $m_s$ . En el caso del ACLS en  $M_1$ ,  $B_h$  es la longitud de la parte horizontal del tubo y  $h$  la altura de la columna de líquido; la aceleración del suelo es expresada como  $\ddot{u}_g$ .

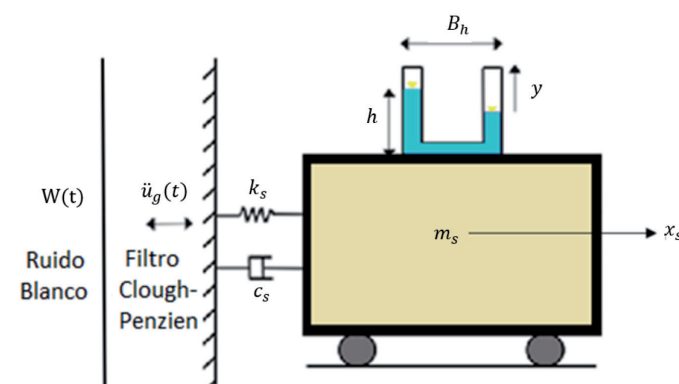
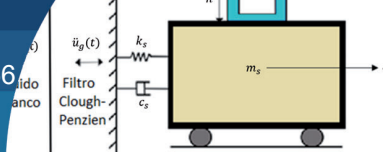


Figura 1: Modelo del estudio



## Ecuaciones de movimiento del ACLS

Las ecuaciones del movimiento de  $M_1$  se muestran a continuación (Sakai *et al.*, 1989):

$$\rho AL_e \ddot{y} + \frac{1}{2} \rho \xi A |\dot{y}| \dot{y} + 2\rho g A y = -\rho AB_h (\ddot{x}_s + \ddot{u}_g) \quad (1)$$

donde  $\rho$  es la densidad del líquido del ACLS,  $A$  es el área de la sección transversal,  $L_e = 2h + B_h$  es la longitud efectiva de la columna líquida y  $g$  es la aceleración de gravedad. El coeficiente de pérdida de carga corresponde a  $\xi$ , el cual es controlado por el diámetro del orificio en la columna horizontal.

La ecuación (1) se linealiza mediante el proceso de linealización estadística equivalente, quedando:

$$\rho AL_e \ddot{y} + 2\rho A c_p \dot{y} + 2\rho g A y = -\rho AB_h (\ddot{x}_s + \ddot{u}_g) \quad (2)$$

donde, para un proceso estacionario Gaussiano de media cero:

$$c_p = \frac{\xi \sigma_y}{\sqrt{2\pi}} \quad (3)$$

En la ecuación (3),  $c_p$  representa el coeficiente de amortiguación de la linealización estadística equivalente y  $\sigma_y$  representa la desviación estándar de la velocidad del líquido. Si se normaliza la ecuación (2) respecto a la masa del líquido se tiene:

$$\ddot{y} + \frac{2c_p}{L_e} \dot{y} + \frac{2g}{L_e} y + p \ddot{x}_s = -p \ddot{u}_g \quad (4)$$

donde  $p = \frac{B_h}{L_e}$  es la razón de longitud (Chakraborty *et al.*, 2012). Además, se tiene que  $\omega_1 = \sqrt{\frac{2g}{L_e}}$  es la frecuencia del líquido y  $\gamma = \frac{\omega_1}{\omega_s}$  es la razón de sintonía, donde  $\omega_s$  corresponde a la frecuencia del sistema principal.

## Ecuaciones de movimiento del sistema principal con ACLS

La ecuación de movimiento del sistema principal con un ACLS adicionado es:

$$(m_s + \rho AB_h + 2\rho h A) \ddot{x}_s + c_s \dot{x}_s + k_s x_s = -(m_s + \rho AB_h + 2\rho h A) \ddot{u}_g - \rho AB_h \ddot{y} \quad (5)$$

donde  $m_l = \rho AB_h + 2\rho h A$  y corresponde a la masa del ACLS. Reescribiendo (5) se tiene:

$$(m_s + m_l) \ddot{x}_s + c_s \dot{x}_s + k_s x_s = -(m_s + m_l) \ddot{u}_g - \rho A p L_e \ddot{y} \quad (6)$$

La relación entre la masa del amortiguador y la masa del sistema principal se denomina razón de masa y se expresa como:

$$\mu = \frac{\rho A L_e}{m_s} \quad (7)$$

Normalizando la ecuación (6) con respecto a la masa  $m_s$ :

$$(1 + \mu) \ddot{x}_s + \frac{c_s}{m_s} \dot{x}_s + \frac{k_s}{m_s} x_s = -(1 + \mu) \ddot{u}_g - \mu p \ddot{y} \quad (8)$$

Si  $\omega_s = \sqrt{\frac{k_s}{m_s}}$  y  $\xi_s = \frac{c_s}{2m_s \omega_s}$  representan la frecuencia y el amortiguamiento del sistema principal, la ecuación (8) queda definida como:

$$(1 + \mu) \ddot{x}_s + 2\xi_s \omega_s \dot{x}_s + \omega_s^2 x_s + \mu p \ddot{y} = -(1 + \mu) \ddot{u}_g \quad (9)$$

Las ecuaciones (4) y (8) pueden expresarse matricialmente de la siguiente forma:

$$\begin{bmatrix} 1 & p \\ \mu p & (1 + \mu) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{y} \\ \ddot{x}_s \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{2c_p}{L_e} & 0 \\ 0 & 2\xi_s \omega_s \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{y} \\ \dot{x}_s \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{2g}{L_e} & 0 \\ 0 & \omega_s^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} y \\ x_s \end{Bmatrix} = - \begin{Bmatrix} p \\ (1 + \mu) \end{Bmatrix} \ddot{u}_g \quad (10)$$

La ecuación (10) se puede expresar como:

$$\mathbf{M} \ddot{\mathbf{u}} + \mathbf{C} \dot{\mathbf{u}} + \mathbf{K} \mathbf{u} = -\mathbf{M} \mathbf{r} \ddot{u}_g \quad (11)$$

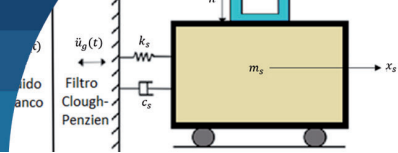
En donde es el vector de grados de libertad de  $M_1$ ,  $\mathbf{M}$  representa la masa,  $\mathbf{C}$  el amortiguamiento,  $\mathbf{K}$  la rigidez del sistema principal con un ACLS acoplado,  $\mathbf{r} = \{0 \ 1\}^T$  y  $\mathbf{u} = \{x_s \ y\}^T$ . Si realizamos la formulación en espacio de estado, definimos el vector de estado de  $M_1$  como:

$$\mathbf{X}_1 = \{x_s \ y \ \dot{x}_s \ \dot{y}\}^T \quad (12)$$

donde la ecuación de estado queda como muestra la ecuación (13):

$$\dot{\mathbf{X}}_1 = \mathbf{A} \mathbf{X}_1 + \mathbf{B} \mathbf{u} \ddot{u}_g \quad (13)$$

Donde la matriz de estado del sistema estructura con ACLS es:



$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{2 \times 2} & \mathbf{I}_{2 \times 2} \\ \mathbf{M}^{-1}\mathbf{K} & \mathbf{M}^{-1}\mathbf{C} \end{bmatrix} \quad (14a)$$

$$\mathbf{B}_u = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{2 \times 1} \\ -\mathbf{M}^{-1}\mathbf{m}^* \end{bmatrix} \quad (14b)$$

$$\mathbf{M}^* = \begin{bmatrix} 1 + \mu & 0 \\ 0 & \mu \end{bmatrix} \quad (14c)$$

## Procedimiento de optimización

### Excitación sísmica

Esta investigación realiza un análisis estocástico para la determinación de la desviación estándar de desplazamiento de la estructura principal, considerando una excitación de bajo contenido de frecuencias. Para caracterizar esta excitación se adopta un filtro de Clough-Penzien, ecuación (15), para el cual se calibran los parámetros para que se ajuste a la Densidad de Potencia Espectral  $S_g(\omega)$  del sismo de México de 1985, el que posee un bajo contenido de frecuencias.

$$S_g(\omega) = S_o \frac{\omega_g^4 + 4\xi_g^2 \omega_g^2 \omega^2}{(\omega_g^2 - \omega^2) + 4\xi_g^2 \omega_g^2 \omega^2} \frac{\omega^4}{(\omega_f^2 - \omega^2) + 4\xi_f^2 \omega_f^2 \omega^2} \quad (15)$$

En (15),  $S_o$  es la intensidad del ruido blanco,  $\omega_g$  es la frecuencia del estrato de suelo,  $\omega_f$  es la frecuencia del filtro,  $\xi_g$  es el amortiguamiento del estrato de suelo y  $\xi_f$  es el amortiguamiento del filtro, estos parámetros son ajustados por mínimos cuadrados. Los parámetros del filtro se muestran en la Tabla 1, en donde NBP (narrow band process) corresponde al proceso de ancho de banda angosto.

Tabla 1: Parámetros del filtro Clough-Penzien

Excitación	Parámetros				
	$S_o$	$\omega_g$ , rad/s	$\omega_f$ , rad/s	$\xi_g$	$\xi_f$
NBP	1335.6	5	6	0.2	0.8

El vector de estado del filtro es:

$$\mathbf{X}_f = \{x_g \dot{x}_g x_f \dot{x}_f\}^T \quad (16)$$

Y la ecuación de estado del filtro (Saitua *et al.*, 2018):

$$\dot{\mathbf{X}}_f = \mathbf{A}_f \mathbf{X}_f + \mathbf{B}_f W(t) \quad \ddot{u}_g = \mathbf{C}_f \mathbf{X}_f \quad (17a,b)$$

donde  $W(t)$  es la intensidad de ruido blanco que debe ser ajustada mediante la siguiente condición:

$$\sigma_{\ddot{u}_g}^2 = \frac{PGA}{3} \quad (18)$$

Siendo  $PGA$ , Peak Ground Acceleration, es decir, la aceleración máxima del suelo, en este estudio se utilizó  $PGA = 0.3g$ , donde  $g$  es la aceleración de gravedad y  $\sigma_{\ddot{u}_g}^2$  es la varianza de la aceleración del suelo. Las matrices  $\mathbf{A}_f$ ,  $\mathbf{C}_f$ ,  $\mathbf{B}_f$  corresponden a las matrices de representación de espacio de estado del filtro. Con  $\mathbf{A}_f$  la matriz de estado del filtro,  $\mathbf{C}_f$  el vector de output del filtro y  $\mathbf{B}_f$  el vector de colocación de excitación sísmica del filtro.

$$\mathbf{A}_f = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\omega_g^2 & -2\xi_g \omega_g & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \omega_f^2 & 2\xi_f \omega_f & -\omega_f^2 & -2\xi_f \omega_f \end{bmatrix} \quad (19)$$

$$\mathbf{B}_f = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (20a,b)$$

Finalmente, el vector de estado del sistema, estructura - ACLS - filtro, es el siguiente:

$$\mathbf{X}_2 = \{x_s y \dot{x}_s \dot{y} x_g \dot{x}_g x_f \dot{x}_f\}^T \quad (21)$$

Y la ecuación de estado del sistema completo es:

$$\dot{\mathbf{X}}_2 = \mathbf{A}_2 \mathbf{X}_2 + \mathbf{B}_2 W(t) \quad (22)$$

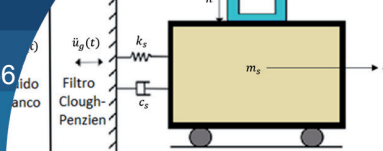
A continuación, se muestran las ecuaciones de estado del sistema completo. Donde la ecuación (23a) corresponde a la matriz de estado expandida, la ecuación (23b) es la matriz de colocación del input.

$$\mathbf{A}_2 = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B}_u \mathbf{C}_f \\ \mathbf{0} & \mathbf{A}_f \end{bmatrix} \quad \mathbf{B}_2 = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{B}_f \end{bmatrix} \quad (23a,b)$$

Ahora, expandiendo el estado, para incluir el filtro de ancho de banda angosto, queda:

$$\begin{Bmatrix} \dot{\mathbf{X}}_2 \\ \dot{\mathbf{X}}_f \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B}_u \mathbf{C}_f \\ \mathbf{0} & \mathbf{A}_f \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{X}_2 \\ \mathbf{X}_f \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{B}_f \end{Bmatrix} W(t) \quad (24)$$





## Incertidumbre en los parámetros

Se introdujo una incertidumbre de 5 y 10%, tanto positiva como negativa, a la razón de longitud  $p$ , la razón de masa  $\mu$  y el periodo  $T_s$ . Donde, la razón de longitud y la razón de masa corresponden a parámetros del ACLS, mientras que el periodo considerado es el de la estructura. Se consideran tres periodos, correspondientes a estructuras rígidas  $T_s = 1.5$  s, semiflexibles  $T_s = 2.0$  s y flexibles  $T_s = 2.5$  s. La incertidumbre es ingresada en los parámetros mencionados, a partir de la ecuación de Lyapunov.

$$\overline{\mathbf{A}_1 \mathbf{R}} + \overline{\mathbf{R}} \mathbf{A}_1^T + \overline{\mathbf{B}_1} \mathbf{W} = 0 \quad (25)$$

Donde  $\mathbf{R}$  corresponde a la matriz de covarianza del sistema completo sin incertidumbre, la que es obtenida resolviendo la ecuación de Lyapunov. Para el ingreso de incertidumbre, se deriva parcialmente la ecuación de Lyapunov, con respecto al parámetro  $x_i$ .

$$\overline{\mathbf{A}_1} \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial x_i} + \overline{\mathbf{R}} \frac{\partial \mathbf{A}_1}{\partial x_i} + \overline{\mathbf{R}} \frac{\partial \mathbf{A}_1^T}{\partial x_i} + \mathbf{A}_1^T \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial x_i} + \overline{\mathbf{B}_1} \mathbf{W} = 0 \quad (26)$$

Donde  $x_1 = p$ ,  $x_2 = \mu$ , y  $x_3 = T_s$  son los parámetros a los que se agrega incertidumbre. Para agregar una incertidumbre positiva, se adiciona la variación de la desviación estándar del parámetro del sistema principal o del ACLS considerado, y en sentido contrario para una incertidumbre negativa, se resta. Ésta se determina, a partir de la variación de primer orden de la matriz de covarianza  $\frac{\partial \mathbf{R}}{\partial x_i}$  que se obtiene resolviendo la ecuación (26).

Por otra parte, las desviaciones estándar y variación de las desviaciones estándar se obtienen de las ecuaciones (27a,b) respectivamente (Debbarma *et al.*, 2010).

$$\sigma_{x_s} = \sqrt{\mathbf{R}(1,1)} \quad ; \quad \frac{\partial \sigma_{x_s}}{\partial z_i} = \frac{1}{2} \left[ \frac{\frac{\partial \mathbf{R}(1,1)}{\partial z}}{\sqrt{\mathbf{R}(1,1)}} \right] \quad (27a,b)$$

Finalmente, el valor de la desviación estándar del desplazamiento de la estructura principal con incertidumbre positiva  $\sigma_{xup}$  o negativa  $\sigma_{xlow}$  se obtiene de la ecuación (28) (Debbarma *et al.*, 2010).

$$\sigma_x = \bar{\sigma}_x \pm \delta x_i \pm \dots, \sum_{i=1}^m \frac{\partial \sigma_x}{\partial x_i} \begin{cases} \sigma_{xup} = \bar{\sigma}_x + \sum_{i=1}^m \frac{\partial \sigma_x}{\partial x_i} \pm \dots, \\ \sigma_{xlow} = \bar{\sigma}_x - \sum_{i=1}^m \frac{\partial \sigma_x}{\partial x_i} \pm \dots, \end{cases} \quad (28)$$

## Función objetivo

Para la optimización se resuelve un problema de MIN-MAX, en el cual se determinan la razón de sintonía  $\gamma_{opt}$  y el coeficiente de pérdida de carga  $\xi_{opt}$  óptimos para tres casos, sin incertidumbre, con incertidumbre positiva y con incertidumbre negativa, de los parámetros del sistema con ACLS, considerando incertidumbre en los parámetros del sistema  $p$ ,  $\mu$ ,  $T_s$ . De esta manera, la optimización se realiza del siguiente modo:

$$\begin{aligned} \text{Minimizar: } J(\gamma_{opt,up}, \xi_{opt,up}) &= \text{Min}(\sigma_{x_{sup}}) \\ J(\gamma_{opt}, \xi_{opt}) &= \text{Min}(\sigma_{x_s}) \quad (29a,b,c) \\ J(\gamma_{opt,low}, \xi_{opt,low}) &= \text{Min}(\sigma_{x_{s,low}}) \end{aligned}$$

$$0.5 < \gamma_l < 1.5 \quad 0 < \xi_l < 30 \quad (30a, b)$$

Donde  $\sigma_{xup}$ ,  $\sigma_{xlow}$  y  $\sigma_{x_s}$  corresponden a la desviación estándar del desplazamiento en  $x$  considerando incertidumbre positiva, negativa y sin incertidumbre, respectivamente. Los rangos considerados como límites de optimización, se encuentran en la ecuación (30a,b). Se consideraron estos límites de variación de los parámetros óptimos, debido a que representan a la mayoría de las estructuras existentes. En cuanto al coeficiente de pérdida de carga, estos límites están dentro de lo aceptable en la realidad.

También es necesario restringir el movimiento del líquido de columna del amortiguador, por lo que se define una condición para que el líquido en el ACLS no sobrepase el nivel de altura de la columna del ACLS, evitando así pérdida de agua, donde  $c\sigma_y$  representa el desplazamiento máximo del líquido en la columna.

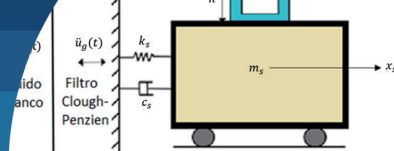
$$h - c\sigma_y \geq 0 \quad (31)$$

Donde  $c$  es el peak factor que en este estudio se consideró como 2.0.

## Eficiencia del ACLS

Como criterio de evaluación de la eficiencia de un ACLS sometido a una excitación de bajo contenido de frecuencia, se utiliza la reducción de desplazamiento (RD) del sistema principal, que se le ha adicionado un ACLS óptimo.

$$RD = \left( 1 - \frac{\sigma_{x,c/ACLS}}{\sigma_{x,s/ACLS}} \right) \cdot 100\% \quad (32)$$



Donde  $\sigma_{x_c/ACLS}$  y  $\sigma_{x_s/ACLS}$  corresponden a la desviación estándar de desplazamiento del sistema principal con un ACLS adicionado y sin ACLS, respectivamente.

## Resultados

A continuación se entrega la sensibilidad en los parámetros óptimos, razón de frecuencia y coeficiente de pérdida de carga; en la eficiencia y raíz cuadrática media, cuando se incluye incertidumbre en la razón de masa, razón de longitud del ACLS y periodo de la estructura. Las incertidumbres incluidas en los parámetros consideradas son de 5 y 10%, en forma positiva y negativa.

## Sensibilidad de los parámetros óptimos del ACLS

### Influencia de la incertidumbre de la razón de masa

La Figura 2 muestra la razón de sintonía óptima  $\gamma_{opt}$  en la fila superior, y el coeficiente de pérdida de carga óptimo  $\xi_{opt}$  en la fila inferior, en función de la razón de masa  $\mu_l$  y para un amortiguamiento del sistema  $\xi_s = 0.05$ . Se considera una incertidumbre en la razón de masa de  $\pm 5$  y  $\pm 10\%$ . Las columnas corresponden a tres periodos

de la estructura, desde la primera a la tercera columna, rígida, semiflexible y flexible, respectivamente. Las líneas de color azul, rojo y negro, corresponden a una incertidumbre de un 0, 5 y 10% respectivamente. Además, la línea continua representa una incertidumbre negativa y la línea entrecortada una incertidumbre positiva. Se observa un comportamiento muy distinto en la estructura más rígida con respecto a las más flexibles. Mientras en las estructuras más flexibles, existe un decrecimiento lineal de la razón de frecuencias óptimas y un crecimiento lineal del coeficiente de pérdida de carga, con respecto a la razón de masa. En estructuras más rígidas para razones de masa entre 0.01 y 0.05, la razón de frecuencias óptima es insensible y el coeficiente de pérdida de carga posee una pendiente negativa con respecto a este parámetro. A partir de ese valor el comportamiento de los parámetros óptimos es análogo a las estructuras más flexibles.

En cuanto a la sensibilidad a la incertidumbre en la razón de masa en los parámetros óptimos del ACLS, debido a que las rectas tienen un crecimiento lineal, la sensibilidad de la incertidumbre en porcentaje se mantiene respecto al valor óptimo. La razón de frecuencias óptimas del

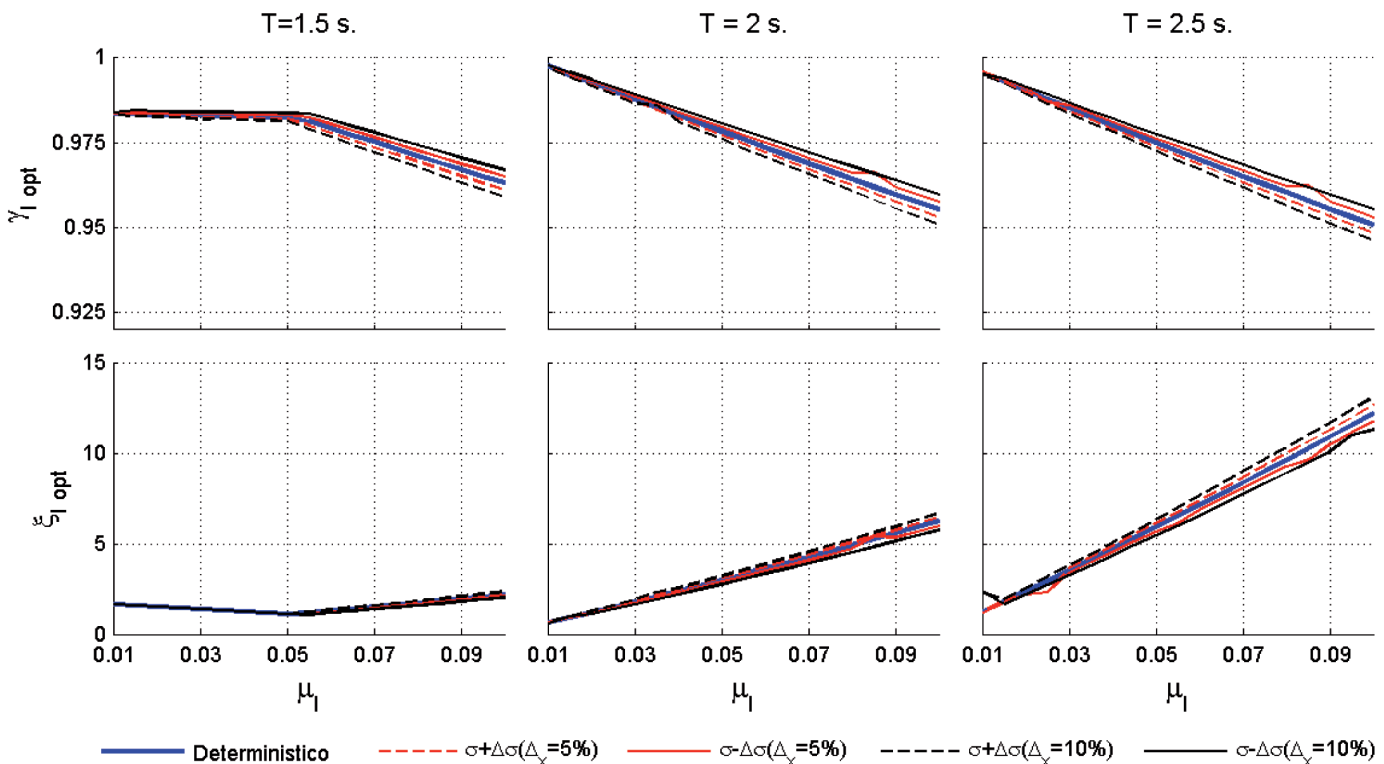
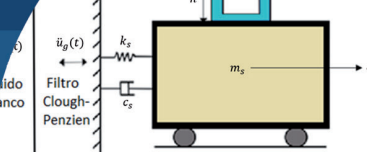


Figura 2: Parámetros óptimos del ACLS con incertidumbre en la razón de masa de  $\pm 5$  y  $\pm 10\%$ ;  $\xi_s = 0.05$



ACLS aumenta en forma lineal y es mayor para una mayor incertidumbre de la razón de masa en sentido negativo, y menor en el caso contrario. Mientras que el coeficiente de pérdida de carga aumenta, cuando la incertidumbre es negativa. Y es menor, cuando la incertidumbre es positiva.

### Influencia de la incertidumbre en la razón de longitud

La Figura 3 muestra seis gráficos que contienen el comportamiento los parámetros óptimos en función de la razón de longitud y con una incertidumbre en la razón de longitud del ACLS. La distribución de los gráficos es análoga a la Figura 2.

Al igual que en la Figura 2, el comportamiento de los parámetros óptimos del ACLS en estructuras rígidas, es distinto al de las estructuras flexibles.

Se observa en la Figura 3, que la razón de frecuencias óptima del ACLS, tiende a ser casi insensible con respecto a la razón de longitud en estructuras flexibles. En estructura de rigidez intermedia disminuye levemente, con respecto a la razón de longitud. Sin embargo, en estructuras más rígidas, existe un decrecimiento en forma cuadrática con

respecto al aumento de la razón de longitud.

Por otra parte, para estructuras más flexibles e intermedias, el coeficiente de pérdida de carga se incrementa en forma lineal, a medida que aumenta la razón de longitud. En cambio, cuando la estructura es más rígida, el coeficiente de pérdida de carga tiene un valor que crece en forma cuadrática, con respecto al aumento del valor de la razón de longitud. Se observa en la Figura 3, que el valor óptimo del coeficiente de pérdida de carga en estructuras flexibles y semiflexibles, muestra la mayor sensibilidad, con respecto a una incertidumbre en la razón de longitud. Además, una incertidumbre positiva en la razón de longitud, produce un aumento del coeficiente de pérdida de carga, y que una incertidumbre negativa produce el efecto contrario en el valor de ese parámetro óptimo.

### Influencia de la incertidumbre en el periodo de la estructura principal

La Figura 4 muestra la razón de sintonía  $\gamma_{opt}$  y el coeficiente de pérdida de carga  $\xi_{opt}$  óptimos en función del periodo de la estructura principal  $T_s$ , para un amortiguamiento del

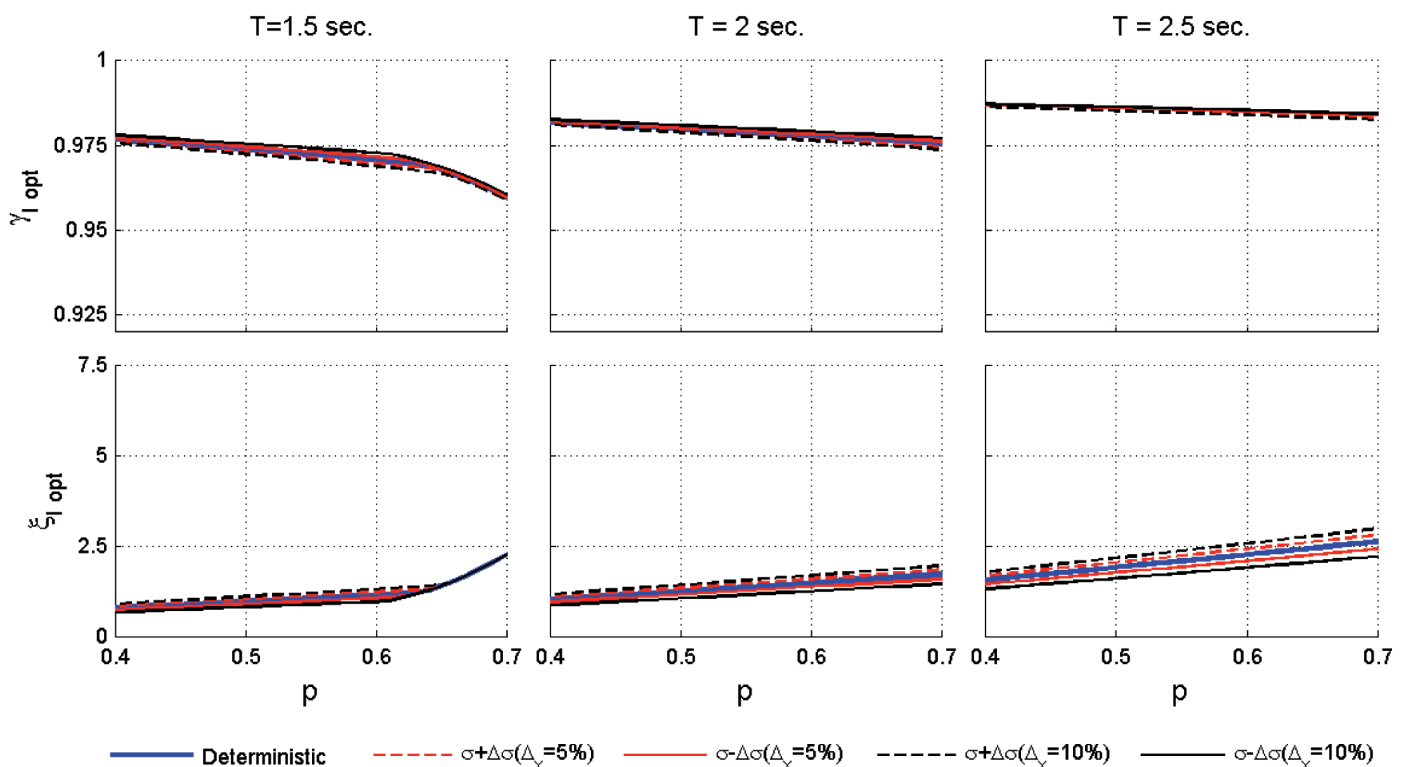


Figura 3: Parámetros óptimos del ACLS con incertidumbre en la razón de longitud de  $\pm 5$  y  $\pm 10\%$ ;  $\xi_s = 0.05$



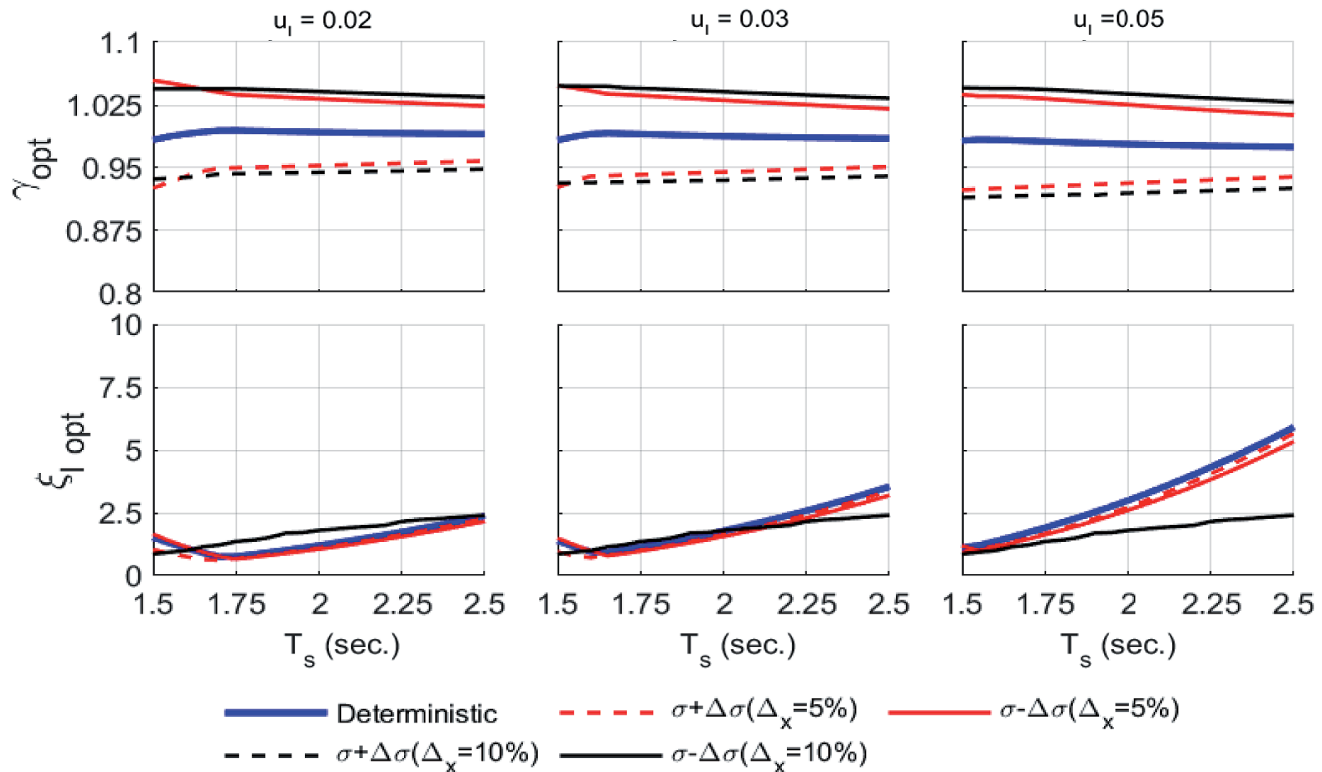
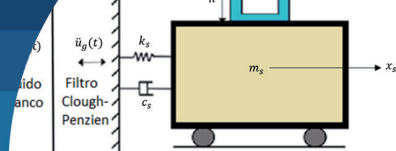


Figura 4: Parámetros óptimos del ACLS con incertidumbre en el periodo de la estructura principal de  $\pm 5$  y  $\pm 10\%$ ;  $\xi_s = 0.05$

sistema  $\xi_{opt} = 0.05$ . Las columnas consideran tres razones de masa del líquido,  $u_l = 0.02, 0.03$  y  $0.05$ , desde la columna de la izquierda a la derecha. En general, los valores usados en la práctica para razones de masa en los ACLS, están alrededor del 2%. Sin embargo, en esta investigación se han considerado valores mayores (5%), para tener una visión más clara de la tendencia del efecto de la razón de masa.

Se observa que el coeficiente de pérdida de carga aumenta en forma cuadrática a medida que la estructura es más flexible, siendo este incremento mayor a medida que aumenta la razón de masa. Respecto a la inclusión de incertidumbre en el periodo de la estructura, se observa que el valor de la razón de frecuencia óptima del ACLS es muy dependiente de ésta. Se observan variaciones en la razón de frecuencia óptima de un 5 a 7%, a medida que la estructura es más flexible. Con respecto a la sensibilidad del coeficiente de pérdida de carga óptimo, se observa que depende de la razón de masa, cuando esta es mayor. Cuando la razón de masa es muy alta, la sensibilidad es mayor, provocando una reducción del valor del coeficiente de pérdida de carga óptimo del ACLS.

## Eficiencia respecto a parámetros del sistema

En los gráficos siguientes, se analiza la influencia de la incertidumbre en los parámetros del sistema, en la eficiencia del ACLS. La eficiencia se medirá como un porcentaje de reducción de la desviación estándar del desplazamiento del sistema controlado por una ACLS, con respecto a uno no controlado. La expresión (32) se ocupará en el cálculo de la eficiencia.

## Sensibilidad de la eficiencia con respecto a la razón de masa

La Figura 5 muestra la eficiencia de la estructura para una variación de la razón de masa desde un 1 a 10%. Cada columna corresponde a un periodo de la estructura, desde una estructura rígida a una flexible, de izquierda a derecha. Se observa un aumento en la eficiencia del ACLS, a medida que la razón de masa es mayor. Sin embargo, sólo se observa sensibilidad en la eficiencia ante una incertidumbre en la razón de masa, en estructuras muy flexibles. Ante una incertidumbre positiva de un 5%, aumentando el valor de la eficiencia.

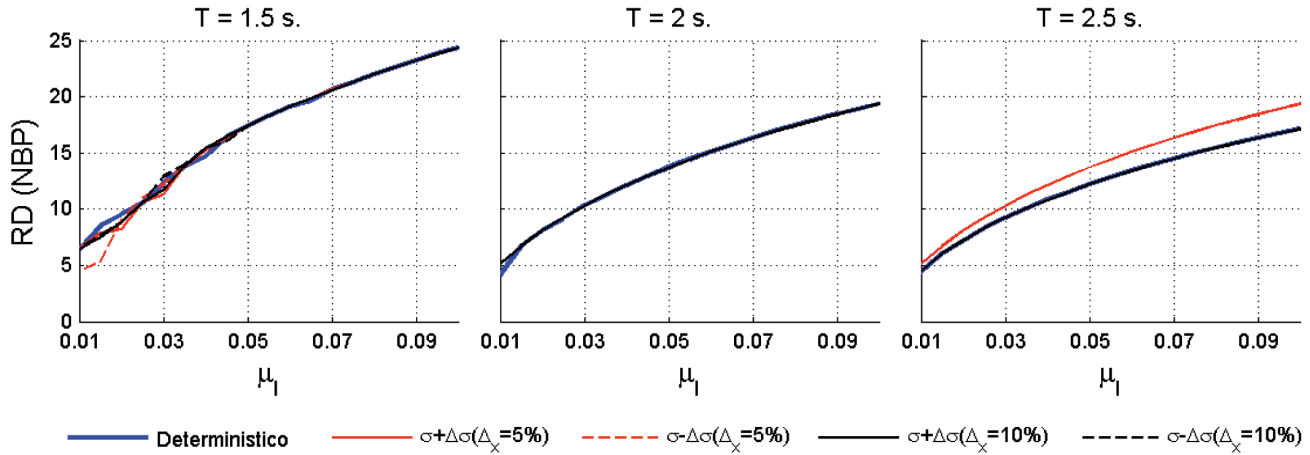
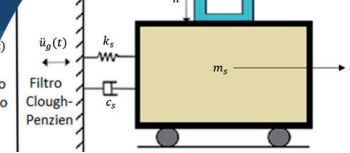


Figura 5: Porcentaje de reducción del desplazamiento de la estructura con un ACLS óptimo con incertidumbre en la razón de masa de  $\pm 5$  y  $\pm 10\%$ ;  $\xi_s = 0.05$

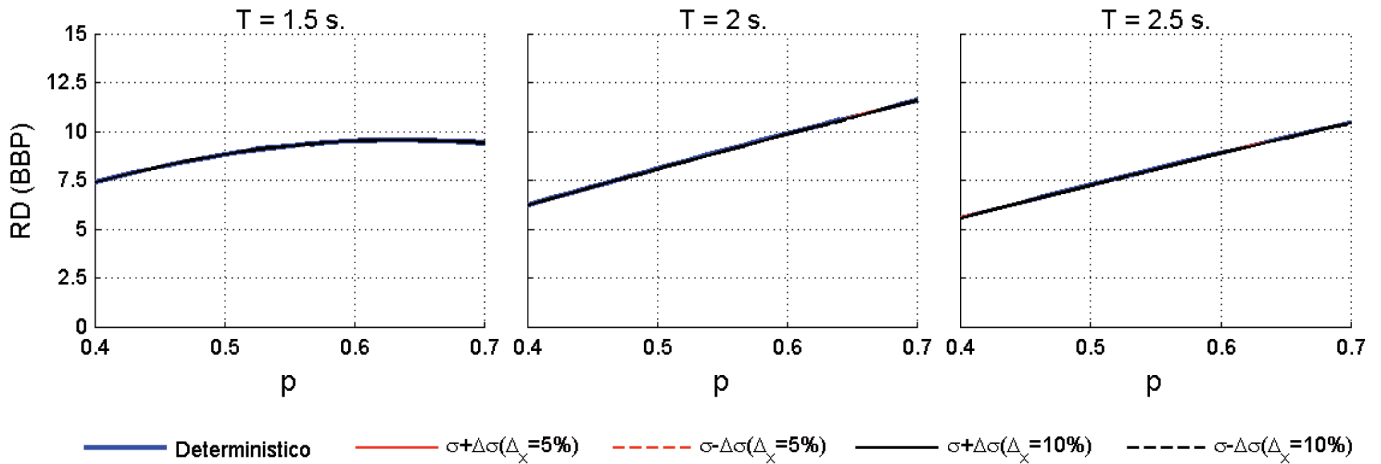


Figura 6: Porcentaje de reducción del desplazamiento de la estructura con un ACLS óptimo con incertidumbre en la razón de longitud de  $\pm 5$  y  $\pm 10\%$ ;  $\xi_s = 0.05$

### Sensibilidad de la eficiencia con respecto a la razón de longitud

La Figura 6 muestra un comportamiento en la eficiencia distinto en estructuras muy rígidas, respecto a las más flexibles. En estructuras rígidas, la eficiencia alcanza un máximo de un 10% para una razón de longitud de 0.6. En estructuras más flexibles, se observa un crecimiento lineal de la eficiencia. Por otra parte, no se aprecia ninguna sensibilidad, al introducir una incertidumbre en la razón de longitud, en la reducción de desplazamiento de un sistema controlado por un ACLS óptimo.

### Sensibilidad de la eficiencia respecto al periodo de la estructura

La Figura 7 muestra el porcentaje de reducción de desplazamiento en función del periodo de la estructura principal. Se observan tres columnas cada una para una razón de masa. Las razones de masa crecen desde la columna de la izquierda hacia la derecha.

Se observa que la eficiencia del ACLS aumenta a medida que aumenta la razón de masa, y es prácticamente insensible respecto al periodo de la estructura principal, en estructuras de menor masa. Sin embargo, cuando aumenta la razón de masa y la flexibilidad de la estructura, la

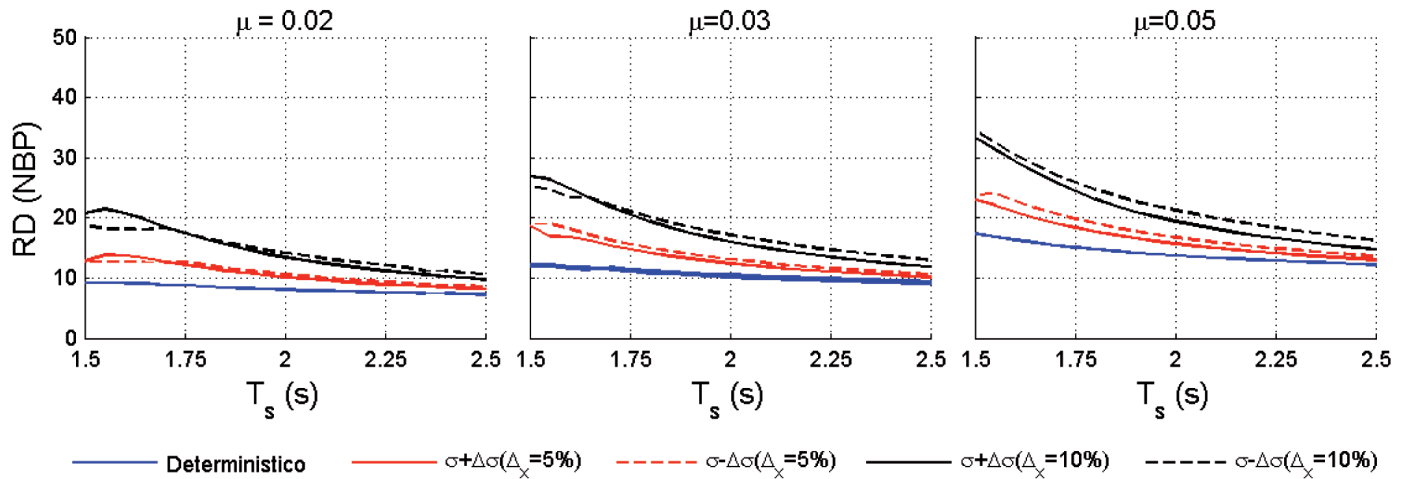
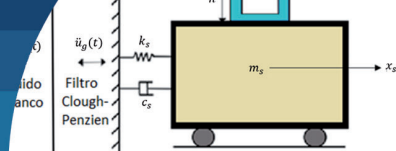


Figura 7: Porcentaje de reducción del desplazamiento de la estructura con un ACLS óptimo con incertidumbre en el periodo de la estructura de  $\pm 5$  y  $\pm 10\%$ ;  $\xi_s = 0.05$

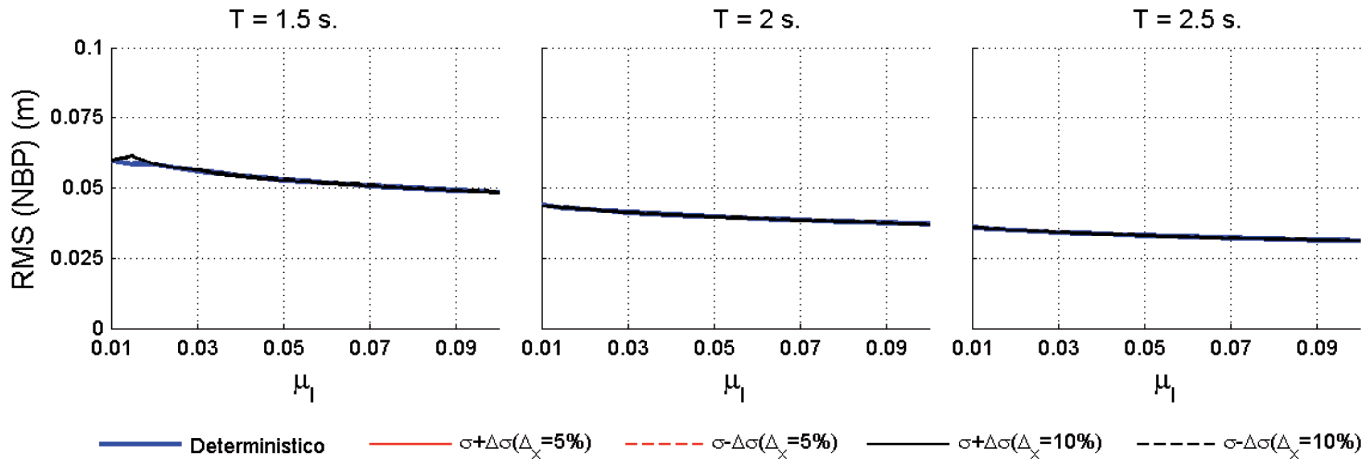


Figura 8: RMS de desplazamiento de la estructura con un ACLS óptimo con incertidumbre en la razón de masa de  $\pm 5$  y  $\pm 10\%$ ;  $\xi_s = 0.05$

eficiencia del ACLS disminuye. Por otra parte, la Figura 7 muestra una gran sensibilidad a una incertidumbre en el periodo de la estructura. Por lo que, si existe un error en la determinación del valor correcto del periodo de la estructura, se produce una gran diferencia en el valor de la eficiencia. Sin embargo, en este caso, la eficiencia aumenta con la incertidumbre, por lo que no perjudicaría el comportamiento de la estructura.

## Raíz cuadrática media del desplazamiento de la estructura

En las Figuras 8 a 10, se muestra la raíz cuadrática media RMS del desplazamiento del sistema principal, con respecto a parámetros del sistema, cuando se ha incluido una incertidumbre en ellos.

## Influencia en la RMS de una incertidumbre en la razón de masa

La Figura 8 muestra la RMS en función de la razón de masa, para tres periodos de estructuras,  $T = 1.5$ ,  $2.0$  y  $2.5$  s. Se observa que existe una disminución del desplazamiento, a medida que aumenta la razón de masa y aumenta la flexibilidad de la estructura. Se observa también que el RMS de desplazamiento de la estructura principal es insensible a la inclusión de incertidumbre en los parámetros.

## Influencia en la RMS de la razón de longitud

La Figura 9 muestra la RMS del desplazamiento de la estructura, en función de la razón de longitud, y para periodos de la estructura principal de  $1.5$ ,  $2.0$  y  $2.5$  s, lo que representa estructuras más rígidas a más flexibles. Se

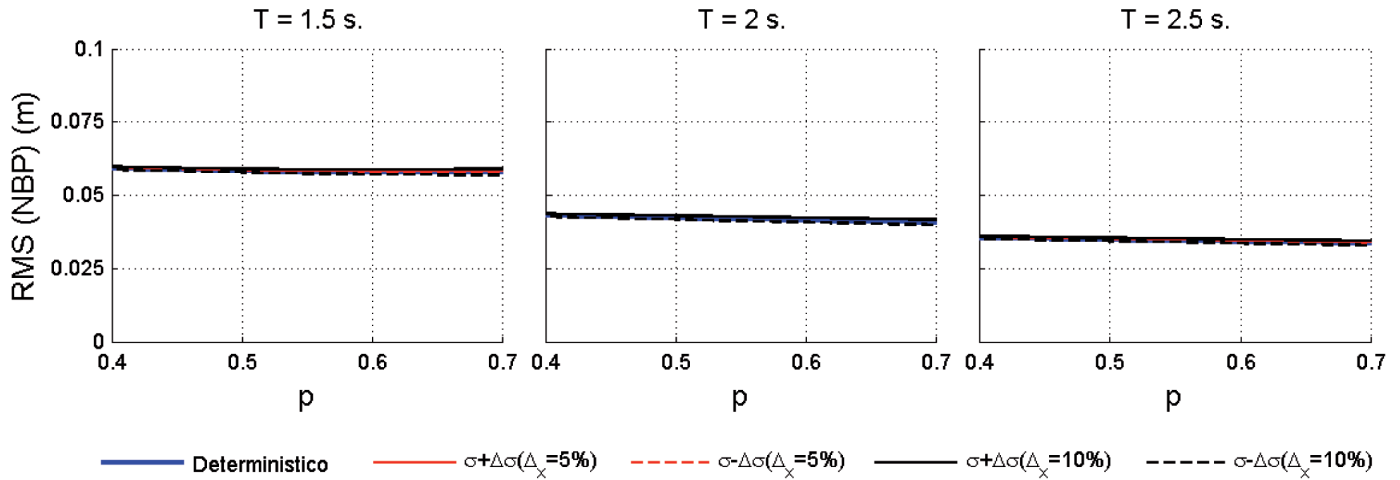
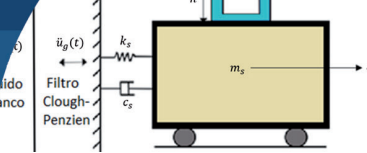


Figura 9: Porcentaje de reducción del desplazamiento de la estructura con un ACLS óptimo, con incertidumbre en la razón de longitud de  $\pm 5$  y  $\pm 10\%$ ;  $\xi_s = 0.05$

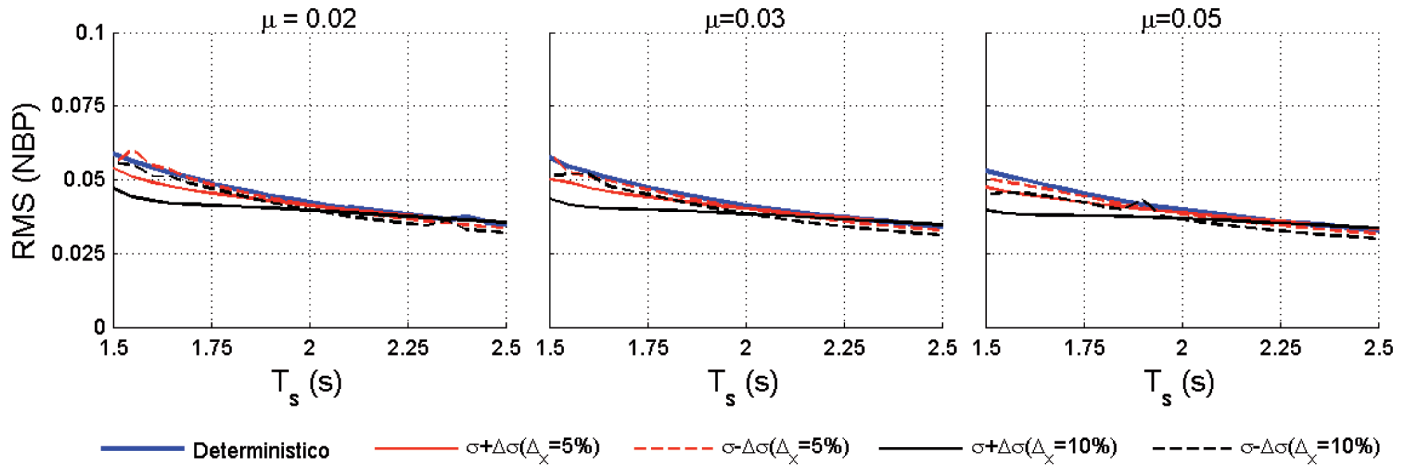


Figura 10: RMS del desplazamiento de la estructura con un ACLS óptimo con incertidumbre en el periodo de la estructura de un 5%, 10% positiva y negativa;  $\xi_s = 0.05$

observa que el RMS del desplazamiento, es insensible a la razón de longitud, y disminuye con la flexibilidad de la estructura. Por otra parte, existe una insensibilidad de la RMS de desplazamiento de la estructura, cuando se incluye incertidumbre en la razón de longitud.

### Influencia en la RMS del periodo de la estructura principal

La Figura 10 muestra el RMS de desplazamiento de la estructura principal respecto al periodo de la estructura, para tres razones de masa.

Se observa que existe una reducción en la RMS, a medida que la estructura es más flexible, siendo prácticamente insensible a la razón de masa. Por otra parte, se observa que

existe sensibilidad a una inclusión de incertidumbre en el periodo de la estructura, siendo más notoria en estructuras más rígidas.

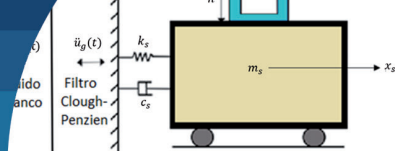
## Conclusiones

De la investigación realizada, se concluye lo siguiente:

La introducción de incertidumbre en parámetros del ACLS, razón de masa, razón de longitud y el periodo de la estructura, afecta el comportamiento de los parámetros de diseño del dispositivo.

Las mayores variaciones en los parámetros óptimos se producen para razones de masa altas, mayores al 7%.

Una incertidumbre en la razón de longitud produce una



variación significativa en el valor del coeficiente de pérdida de carga óptimo.

Una incertidumbre en el periodo de la estructura provoca un efecto notorio en el valor de la razón de sintonía óptima del ACLS. Un porcentaje de incertidumbre de un 10%, produce variaciones en la razón de sintonía de hasta un 7%.

La reducción y media cuadrática de desplazamiento de la estructura sólo es sensible a una incertidumbre en el periodo de la estructura.

## Agradecimientos

Los autores agradecen a la Universidad del Bío-Bío por el financiamiento otorgado para el desarrollo de esta investigación a través de Proyecto Regular de Investigación DIUBB 2060542 IF/R.

## Referencias

Chakraborty, S., Debbarma, R. and Marano, G.C. (2012). Performance of tuned liquid column dampers considering maximum liquid motion in seismic vibration control of structures. *Journal of Sound and Vibration* **331**(7), 1519–1531

Debbarma, R., Chakraborty, S. and Ghosh, S.K. (2010). Optimum design of tuned liquid column dampers under stochastic earthquake load considering uncertain bounded system parameters. *International Journal of Mechanical Sciences* **52**(10), 1385-1393

Espinoza, G., Saavedra, J., Gajardo, K., Suazo, A. y Cifuentes, C. (2021). Eficiencia de un amortiguador de columna de líquido considerando una excitación sísmica de alto contenido de frecuencias e incertidumbre. *Obras y Proyectos* **29**, 67-79

Espinoza, G., Sagredo, G. y Suazo, A. (2020a). Análisis de la eficiencia de un amortiguador combinado sintonizado con incertidumbre en los parámetros sometido a una excitación sísmica de alto contenido de frecuencias. *Obras y Proyectos* **28**, 58-67

Espinoza, G., Rivas, S. y Suazo, A. (2020b). Análisis de la eficiencia de un amortiguador combinado sintonizado con incertidumbre en los parámetros sometido a excitaciones sísmicas de bajo contenido de frecuencias. *Obras y Proyectos* **28**, 68-77

Espinoza, G., Carrillo, C. and Suazo, A. (2018). Analysis of a tuned liquid column damper in non-linear structures subjected to seismic excitations. *Latin American Journal of Solids and Structures* **15**(7), e91

Furtmüller, T., Di Matteo, A., Adam, C. and Pirrotta, A. (2019). Base-isolated structure equipped with tuned liquid column damper: An experimental study. *Mechanical Systems and Signal Processing* **116**, 816-831

Ghosh, A. and Basu, B. (2005). Effect of soil interaction on the performance of liquid column dampers for seismic applications. *Earthquake Engineering and Structural Dynamics* **34**(11), 1375-1389

Rozas, L., Boroschek, R.L., Tamburrino, A. and Rojas, M. (2015). A bidirectional tuned liquid column damper for reducing the seismic response of buildings. *Structural Control and Health Monitoring* **23**(4), 621–640

Saitua, F., Lopez-Garcia, D. and Taflanidis, A.A. (2018). Optimization of height-wise damper distributions considering practical design issues. *Engineering Structures* **173**, 768-786

Sakai, F., Takaeda, S. and Tamaki, T. (1989). Tuned liquid column damper - New type device for suppression of building vibrations. *First International Conference on High-Rise Buildings*, Nanjing, China, 926-931

Won, A.Y., Pires, J.A. and Haroun, M.A. (1996). Stochastic seismic performance evaluation of tuned liquid column dampers. *Earthquake Engineering and Structural Dynamics* **25**(11), 1259-1274

Xu, Y.L., Samali, B. and Kwok, K.C.S. (1992). Control of along-wind response of structures by mass and liquid dampers. *Journal of Engineering Mechanics* **118**(1), 20-39

Zhu, F., Wang, J.T., Jin, F. and Altay, O. (2015). Real-time hybrid simulation of single and multiple tuned liquid column dampers for controlling seismic-induced response. *6<sup>th</sup> International Conference on Advances in Experimental Structural Engineering*, University of Illinois, Urbana-Champaign, USA